ISSN 2075-9827

Карпатські математичні публікації

Carpathian mathematical publications

Карпатские математические публикации

Том 6

№ 2 2014

Карпатські математичні публікації
Науковий журнал

Друкується за рішенням Вченої ради
Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника

Адреса редакції: Факультет математики та інформатики
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
76018, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57
Тел.: (0342) 59-60-50
e-mail: cmp.if.ua@gmail.com
Адреса в інтернеті: http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp/

Карпатські математичні публікації

Науковий журнал
Т.6, №2
2014

Зміст

Carpathian mathematical publications

SCIENTIFIC JOURNAL
V.6, №2
2014

CONTENTS

ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, 6 (2), 181–190
doi:10.15330/cmp.6.2.181-190

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.181–190

ARTEMOVYCH O.D., LUKASHENKO M.P.

ON RIGID DERIVATIONS IN RINGS

We prove that in a ring R with an identity there exists an element $a \in R$ and a nonzero derivation $d \in \operatorname{Der} R$ such that $ad(a) \neq 0$. A ring R is said to be a d-rigid ring for some derivation $d \in \operatorname{Der} R$ if $d(a) = 0$ or $ad(a) \neq 0$ for all $a \in R$. We study rings with rigid derivations and establish that a commutative Artinian ring R either has a non-rigid derivation or $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$ is a ring direct sum of rings $R_1, \ldots, R_n$ every of which is a field or a differentially trivial v-ring. The proof of this result is based on the fact that in a local ring R with the nonzero Jacobson radical $J(R)$, for any derivation $d \in \operatorname{Der} R$ such that $d(J(R)) = 0$, it follows that $d = 0_R$ if and only if the quotient ring $R/J(R)$ is differentially trivial field.

Key words and phrases: derivation, semiprime ring, Artinian ring.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, 57 Shevchenka str., 76018, Ivano-Frankivsk, Ukraine
E-mail: orest_artemovych@hotmail.com (Artemovych O.D.), bilochka.90@mail.ru (Lukashenko M.P.)

INTRODUCTION

Throughout, let R be an associative ring with 1 and $\operatorname{Der} R$ the set of all derivations of R. Recall that a map $\delta : R \to R$ is called *a derivation* of R if $\delta(x + y) = \delta(x) + \delta(y)$ and $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$ for any $x, y \in R$. We prove the following

Proposition 1. *Let R be a ring. Then the following conditions hold:*

(1) *if d is a nonzero derivation of a commutative ring R, then $ad(a) \neq 0$ for some $a \in R$,*

(2) *there exists an element $a \in R$ and a nonzero derivation $d \in \operatorname{Der} R$ such that $ad(a) \neq 0$.*

Different aspects of rigidity of derivations are studied in [4,6,15]. J. Krempa has introduced the concept of a σ-rigid ring [12]. Namely, R is said to be *a σ-rigid ring* for some ring endomorphism $\sigma \in \operatorname{End} R$ if $a\sigma(a) \neq 0$ for all nonzero $a \in R$. By analogy with this and in view of Proposition 1, we say that R is *a d-rigid ring* (or a derivation *d is rigid*), where $d \in \operatorname{Der} R$, if for any $a \in R$ it holds $d(a) = 0$ or $ad(a) \neq 0$. Clearly, the zero derivation 0_R of R is rigid. Every derivation of an integral domain is rigid.

M. Brešar [5], T.-K. Lee and J.-S. Lin [13] have investigated when, for a semiprime ring R, the condition $ad(R)^n = 0$, where n is fixed integer, $a \in R$, $d \in \operatorname{Der} R$, implies that $ad(R) = 0$. By Proposition 1 and results from [13, p.1688] and [8], we obtain the next

Corollary 1. *Let R be a semiprime ring with the derivation d and $a \in R$. If $ad(R)^n = 0$, where n is a fixed integer, then $d = 0_R$.*

УДК 512.552.16
2010 *Mathematics Subject Classification:* 16N60, 16W25, 16P20.

This corollary is an extension of some results from [11] and [8]. We prove the our next

Proposition 2. *Let R be a 2-torsion-free semiprime ring. Then all derivations of R are rigid if and only if R is reduced (that is without nonzero nilpotent elements).*

Recall [2] that a ring R is called *differentially trivial* if $\operatorname{Der} R = \{0_R\}$. Commutative Artinian rings with derivations to be rigid are characterized in the following

Theorem 1. *Let R be a commutative Artinian ring. Then one of the following holds:*

(1) *R has a non-rigid derivation,*

(2) *$R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$ is a ring direct sum of rings $R_1, \ldots, R_n$ every of which is a field or a differentially trivial v-ring.*

For any ring R, $\partial_x : R \to R$ is its inner derivation generated by $x \in R$ that is $\partial_x(r) = xr - rx$ for every $r \in R$, $[R,R] = \{\partial_x(r) \mid x, r \in R\}$, $C(R)$ is the commutator ideal of R that is the ideal generated by $\partial_x(r)$ for all $x, r \in R$, $J(R)$ is its Jacobson radical, $N(R)$ is the set of all nilpotent elements of R, $U(R)$ is the unit group of R, $Z(R)$ is the center of R, $\operatorname{ann}_r a = \{x \in R \mid ax = 0\}$ is the right annihilator of $a \in R$, $\operatorname{ann}_l X = \{a \in R \mid aX = 0\}$ is the right annihilator of $X \subseteq R$. Any unexplained terminology is standard as in [3] and [10].

1 Rings with property $ad(a) = 0$

For the proof of Proposition 1, we need some preliminary lemmas.

Lemma 1. *Let R be a ring. Then the following properties hold:*

(1) *if $a\partial_x(a) = 0$ and $x\partial_a(x) = 0$ for some a, x of R, then $\partial_x(a)^2 = 0$,*

(2) *if $a\partial_x(a) = 0$ for any $a, x \in R$, then $C(R) \subseteq N(R)$,*

(3) *$d(C(R)) \subseteq C(R)$ for each $d \in \operatorname{Der} R$.*

Proof. (1) From $0 = a\partial_x(a) = a(xa - ax)$ and $0 = x\partial_a(x) = x(ax - xa)$ it follows that $axa = a^2x$ and $xax = x^2a$. This gives that

$$\partial_x(a)^2 = (xa - ax)(xa - ax) = xaxa - xa^2x - ax^2a + axax = 0.$$

(2) In view of (1), we see that $\partial_x(a)^2 = 0$, and therefore $C(R) \subseteq N(R)$.

(3) Since $d(r[a,x]t) = d(r)[a,x]t + r[d(a),x]t + r[a,d(x)]t + r[a,x]d(t)$ for any $a, x, r, t \in R$, we have $d(C(R)) \subseteq C(R)$. □

Lemma 2. *Let d be a nonzero derivation of R such that $ad(a) = 0$ for any $a \in R$. Then:*

(1) *R is non-commutative,*

(2) *$d(U(R)) = 0$ (in particular $d(J(R)) = 0$).*

(3) *if I is an ideal of a commutative ring R, then $d(R) \subseteq I$.*

Proof. (1) Indeed, if R is commutative, then $0 = (a+b)d(a+b) = ad(b) + bd(a) = d(ab)$ for any $a, b \in R$, and so $d(R^2) = 0$. But this means that $d = 0_R$, a contradiction.

(2) Let $u \in U(R)$. Then $ud(u) = 0$ and $u \in \operatorname{Ker} d$. Since $1 + J(R) \subseteq U(R)$, we see that $d(J(R)) = 0$.

(3) Let $a, b \in R$. Inasmuch as $ad(a) \in I$ for all $a \in R$ and

$$d(ab) = (a+b)d(a+b) - ad(a) - bd(b),$$

we deduce that $d(R) \subseteq I$. □

Proof of Proposition 1. (1) It follows from Lemma 2 (1).

(2) By contrary, assume that $ad(a) = 0$ for any $a \in R$ and $d \in \operatorname{Der} R$. By Lemma 1 (2) and Lemma 2 (2), $C(R) \subseteq Z(R)$. Let $\overline{R}$ denote $R/C(R)$ and, for $a \in R$, $\overline{a}$ denote the coset $a + C(R)$. The rule $D(\overline{a}) = d(a) + C(R)$ determines a derivation D of the quotient ring $\overline{R}$ such that

$$\overline{a}D(\overline{a}) = \overline{0}_{\overline{R}}.$$

By (1), $D = \overline{0}$, and so $d(a) \in Z(R)$. Then $0 = (a+b)d(a+b) = d(ab)$ and consequently $d(R^2) = 0$. This shows that $d = 0_R$. □

Now we establish some properties of rigid derivations.

Lemma 3. *Let R be a reduced ring, $a \in R$ and $d \in \operatorname{Der} R$. Then:*

(1) *$ad(a) = 0$ if and only if $d(a)a = 0$,*

(2) *d is a rigid derivation.*

Proof. (1) Straightforward.

(2) Assume, by contrary, that there is $a \in R$ such that $d(a) \neq 0$ and $ad(a) = 0$. Then, by item (1), we have that $d(a)a = 0$. Moreover, $0 = d(ad(a)) = d(a)d(a) + ad^2(a)$ and from this, by multiplication from the left by $d(a)$, we obtain that

$$0 = (d(a))^3 + d(a)ad^2(a) = (d(a))^3.$$

This yields that $d(a) = 0$, a contradiction. □

Let p be a prime and

$$F_p(R) = \{x \in R \mid p^k x = 0 \text{ for some positive integer } k\}.$$

Recall that a ring R is called *2-torsion-free* if the implication

$$2x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

is true for any $x \in R$. A ring R is 2-torsion-free if and only if $F_2(R) = 0$.

Lemma 4. *If all derivations in R are rigid and $\exp F_2(R)$ is finite, then in $R/F_2(R)$ also.*

Proof. If, by contrary,

$$\delta : R/F_2(R) \ni r + F_2(R) \mapsto t_r + F_2(R) \in R/F_2(R) \tag{1}$$

is a derivation such that

$$t_u \notin F_2(R) \qquad \text{and} \qquad ut_u \in F_2(R)$$

for some $u \in R$, then $d : R \ni r \mapsto 2^s t_r$, with $\exp F_2(R) = 2^s$ and t_r as in (1), is a derivation which is not rigid. □

Lemma 5. *Let R be a 2-torsion-free ring and $d \in \mathrm{Der}\, R$. If R is d-rigid and $\partial_{d(a)}$-rigid for any $a \in N(R)$, then $d(N(R)) = 0$.*

Proof. We prove by induction on the nilpotency index n of nil-elements in R. Let $a \in N(R)$ and $a^2 = 0$. Left multiplying of $0 = d(a^2) = ad(a) + d(a)a$ by a, we obtain that $ad(a)a = 0$. Since $\partial_{d(a)}$ is rigid and

$$a\partial_{d(a)}(a) = ad(a)a - a^2 d(a) = 0,$$

we deduce that $\partial_{d(a)}(a) = 0$ that is $ad(a) = d(a)a$. Hence $0 = d(a^2) = 2ad(a)$. In view of the rigidity of d and the condition $F_2(R) = 0$, we have $d(a) = 0$.

Now suppose that $a \in N(R)$ and $a^3 = 0$. Then $(a^2)^2 = 0$ and, by the above, $d(a^2) = 0$. Since

$$0 = d(a^3) = d(a)a^2 + ad(a^2) = d(a)a^2 \quad \text{and} \quad 0 = d(a^3) = d(a^2)a + a^2 d(a) = a^2 d(a),$$

the assertion holds by using the same argument as for $n = 2$.

Assume that assertion is true for all positive integer $k < n$ that is if $b^k = 0$ with $b \in N(R)$, then $d(b) = 0$. Let us $a \in N(R)$ and $a^n = 0$. Then there exist positive integer k_1, k_2 such that $k_1, k_2 < n$ but $2k_1 > n$ and $3k_2 > n$ and $(a^2)^{k_1} = 0$ and $(a^3)^{k_2} = 0$ and, by assumption, $d(a^2) = d(a^3) = 0$ and the result follows by using the same argument. □

Proof of Proposition 2. ($\Leftarrow$) It follows from Lemma 3.

($\Rightarrow$) By Lemma 5, we have $N(R) \subseteq Z(R)$ and hence $N(R) = 0$. □

Corollary 2. *If a derivation d of a 2-torsion-free commutative ring R is rigid, then $d(N(R)) = 0$ and $N(R)d(R) = 0$.*

Proof. Indeed, if $a \in R$ and $b \in N(R)$, then $ab \in N(R)$ and therefore, By Lemma 5,

$$0 = d(ab) = d(a)b.$$

□

Example 1. *The condition $F_2(R) = 0$ is essential in Corollary 2.*

In fact, the quotient ring $R = \mathbb{Z}_2[X]/(X^2 + 1)$ of the polynomial ring $\mathbb{Z}_2[X]$ by the ideal $(X^2 + 1)$ contains elements $0, 1, x, x + 1$, where $x(x + 1) = x + 1$. Then a mapping $d : R \to R$ such that $d(0) = d(1) = 0$ and $d(x) = d(x + 1) = 1$ is a derivation of R. But then R is a d-rigid ring with $(x + 1)^2 = 0$ and $d(x + 1) \neq 0$.

Corollary 3. *If d is a rigid derivation of a ring R, then $d(\mathrm{ann}_l\, d(R)) = 0$.*

Proof. Since $\mathrm{ann}_l\, d(R) \cdot d(\mathrm{ann}_l\, d(R)) = 0$, we deduce that $d(\mathrm{ann}_l\, d(R)) = 0$. □

2 Constants in left perfect rings

D. F. Anderson and P. S. Livingston [1] (see also S. B. Mulay [14]) have shown that any automorphism f of a commutative finite ring R that is not a field such that $f(x) = x$ for all zero divisors $x \in R$, is the identity automorphism. Since any commutative finite ring is a finite ring direct sum of local rings, it is clear that the statement needs a proof only when a ring is local. In view of this, P. K. Sharma [16] proved that if a commutative finite local ring R which is not a field, then for any $f \in \mathrm{Aut}\, R$ with $f(x) = x$ for all $x \in J(R)$, $f = \mathrm{id}_R$ if and only if the residue field is differentially trivial. We extended this result in the next

Proposition 3. *Let R be a local ring with the nonzero Jacobson radical $J(R)$. Then the following statements are equivalent.*

(1) *For any derivation $d \in \mathrm{Der}\, R$ such that $d(J(R)) = 0$ it follows that $d = 0_R$.*

(2) *The quotient ring $R/J(R)$ is a differentially trivial field.*

(3) *Every automorphism $f \in \mathrm{Aut}\, R$ such that $f(x) = x$ for any $x \in J(R)$ is trivial, i.e. $f = \mathrm{id}_R$.*

Lemma 6. *Let R be a ring with an ideal I and $d \in \mathrm{Der} R$. If $d(I) = 0$, then $d(R) \subseteq \mathrm{ann}\, I$.*

Proof. Indeed, for any $r \in R$, $j \in I$ we observe that $0 = d(jr) = jd(r)$ and $0 = d(rj) = d(r)j$. □

Corollary 4. *Let R be a ring with an ideal I, $d \in \mathrm{Der}\, R$, $f \in \mathrm{Aut}\, R$ and $\mathrm{ann}\, I \subseteq I$.*

(*i*) *If $d(I) = 0$, then $d^2(R) = 0$ and $(d(R))^2 = 0$.*

(*ii*) *If $f(x) = x$ for any $x \in I$, then $f - \mathrm{id}_R \in \mathrm{Der}\, R$.*

Proof. (*i*) By Lemma 6, $d(R) \subseteq \mathrm{ann}\, I$ and therefore

$$d^2(R) \subseteq d(\mathrm{ann}\, I) \subseteq d(I) = 0 \qquad \text{and} \qquad (d(R))^2 \subseteq (\mathrm{ann}\, I)I = 0.$$

(*ii*) Let $x \in I$ and $a, b, r \in R$. Then $xr, rx \in I$,

$$xf(r) = f(x)f(r) = f(xr) = xr, \quad f(r)x = f(r)f(x) = f(rx) = rx$$

and so $x(f(r) - r) = 0 = (f(r) - r)x$. Hence $f(r) - r \in \mathrm{ann}\, I$. In view of this, we see that

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{id}_R)(a + b) &= f(a + b) - \mathrm{id}_R(a + b)\\ &= (f(a) - \mathrm{id}_R(a)) + (f(b) - \mathrm{id}_R(b)) = (f - \mathrm{id}_R)(a) + (f - \mathrm{id}_R)(b)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{id}_R)(a)b + a(f - \mathrm{id}_R)(b) &= f(a)b - ab + af(b) - ab\\ &= f(a)f(b) + (f(a) - a)(b - f(b)) - ab = f(ab) - ab = (f - \mathrm{id}_R)(ab).\end{aligned}$$

This means that $f - \mathrm{id}_R \in \mathrm{Der}\, R$. □

Corollary 5. *Let R be a local ring that is not a skew field, I its ideal and $0_R \neq d \in \mathrm{Der} R$. If the left annihilator $\mathrm{ann}_l\, I = \{a \in R \mid aI = 0\}$ (respectively the right annihilator $\mathrm{ann}_r\, I = \{a \in R \mid Ia = 0\}$) is zero, then $d(I) \neq 0$.*

Proof. If $d(I) = 0$, then, by Lemma 6, $d(R) \subseteq \mathrm{ann}\, I \subseteq \mathrm{ann}_l\, I = 0$, a contradiction. □

Lemma 7. *Let R be a ring, I an ideal with $\mathrm{ann}\, I \subseteq I$. Then the following statements are equivalent.*

(*i*) *For every $f \in \mathrm{Aut}\, R$ such that $f(x) = x$ for any $x \in I$ it follows that $f = \mathrm{id}_R$.*

(*ii*) *Every derivation $d \in \mathrm{Der}\, R$ such that $d(I) = 0$ is zero.*

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii) Suppose that $d \in \operatorname{Der} R$ and $d(I) = 0$. Then, for any $a, b \in R$, we see that

$$\begin{aligned}(d + \mathrm{id}_R)(a + b) &= d(a + b) + \mathrm{id}_R(a + b)\\ &= (d(a) + \mathrm{id}_R(a)) + (d(b) + i_R(b)) = (d + \mathrm{id}_R)(a) + (d + \mathrm{id}_R)(b)\end{aligned}$$

and, in view of Corollary 4,

$$\begin{aligned}(d + \mathrm{id}_R)(a) \cdot (d + \mathrm{id}_R)(b) &= (d(a) + a)(d(b) + b) = d(a)d(b) + d(a)b + ad(b) + ab\\ &= d(a)b + ad(b) + ab = (d + \mathrm{id}_R)(ab) \text{ and } (d + \mathrm{id}_R)(1) = 1.\end{aligned}$$

So $d + \mathrm{id}_R$ is a ring endomorphism of R. Moreover,

$$(d + \mathrm{id}_R)(\mathrm{id}_R - d) = \mathrm{id}_R = (\mathrm{id}_R - d)(d + \mathrm{id}_R)$$

and therefore $d + \mathrm{id}_R \in \operatorname{Aut} R$. Since $(d + \mathrm{id}_R)(x) = d(x) + x = x = \mathrm{id}_R(x)$ for any $x \in I$, we conclude that $d = 0_R$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Let $f \in \operatorname{Aut} R$ and $f(x) = x$ for all $x \in I$. Then, in view of Corollary 4, we have that $f - \mathrm{id}_R \in \operatorname{Der} R$. Inasmuch as $(f - \mathrm{id}_R)(I) = 0$, we conclude $f = \mathrm{id}_R$. □

Lemma 8. *Let R be a local ring, $d \in \operatorname{Der} R$. Then the following hold:*

(1) *if $d(J(R)) = 0$, then $d = 0_R$ or $\operatorname{ann} J(R) \neq 0$,*

(2) *if $\operatorname{ann} J(R) = 0$, then $d = 0_R$ or $d(J(R)) \neq 0$.*

Lemma 9. *Let R be a ring and let I be a nonzero ideal such that, for $d \in \operatorname{Der} R$, $d(I) = 0$ implies $d = 0_R$. Then*

$$\operatorname{ann} I \subseteq C_R(I) \subseteq Z(R),$$

where the centralizer $C_R(I) = \{z \in R \mid zj = jz \text{ for all } j \in I\}$.

Proof. Clearly, $\operatorname{ann} I \subseteq C_R(I)$. If $a \in C_R(I)$, then $\partial_a(I) = 0$ and therefore $\partial_a(R) = 0$. Hence $a \in Z(R)$. □

Corollary 6. *Let R be a ring and let I be a nonzero ideal with $\operatorname{ann} I \subseteq I$. If $I \subseteq Z(R)$, then R/I is commutative.*

Proof. For any element $x \in R$ we have that $\partial_x(I) = 0$, and so, by Lemma 6, we deduce that $\partial_x(R) \subseteq \operatorname{ann} I \subseteq I$. This yields that R/I is commutative. □

Proof of Proposition 3. (1) $\Rightarrow$ (2) Since R is local, $\operatorname{ann} J(R) \subseteq J(R)$. Suppose that $\theta : R/J(R) \to R/J(R)$ is a nonzero derivation and, for every element $t \in R$, there exists such $w_t \in R$ that

$$\theta(t + J(R)) = w_t + J(R)$$

with $w_{t_0} \notin J(R)$ for some $t_0 \in R$. The left T-nilpotent ideal $J(R)$ has a nonzero annihilator. If $0 \neq u \in \operatorname{ann} J(R)$, then the rule $\mu_u(t) = uw_t$ $(t \in R)$ determines a nonzero derivation μ_u of R for some u. Indeed, if $uw_t = 0$ $(t \in R)$ for all $u \in \operatorname{ann} J(R)$, then $w_{t_0} \in J(R)$, a contradiction. Thus μ_u is nonzero. Inasmuch $\mu_u(J(R)) = 0$, we conclude that $\mu_u(R) = 0$, which gives a contradiction. Hence the quotient ring $R/J(R)$ is differentially trivial.

(2) $\Rightarrow$ (1) Suppose that $R/J(R)$ is a differentially trivial ring. Then every inner derivation of $\overline{R}$ is zero and so $\overline{R}$ is commutative. As a consequence,

$$R/J(R) = F$$

is a differentially trivial field. Assume that d is a nonzero derivation of R such that $d(J(R)) = 0$. Then the rule

$$D : \overline{R} \ni \overline{r} \mapsto d(r) \in A \cap J(R) \ (r \in R)$$

determines a nonzero map D. Since $A \cap J(R)$ is a left F-linear space, there exists such field $F = F_{i_0}$ $(1 \leq i_0 \leq n)$ that a map

$$\theta : F \ni \overline{a} \mapsto d(a) \in A \cap J(R)$$

is nonzero. If $\operatorname{char} F = p$ is a prime, then, by Proposition 1.3 of [2], we have $\overline{a} = \overline{b}^p$ for some $\overline{b} \in F$ and therefore

$$\theta(\overline{a}) = \theta(\overline{b}^p) = p\overline{b}^{p-1} d(b) = 0.$$

Assume that $\operatorname{char} F = 0$. By Proposition 1.2 of [2], F is algebraic over the rational number field $\mathbb{Q}$ and so for every $\overline{a} \in F$ there exists its minimal polynomial

$$m_{\overline{a}} = X^n + c_1 X^{n-1} + \cdots + c_{n-1} X + c_n \in \mathbb{Q}[X].$$

Then

$$0 = \theta(m_{\overline{a}}(\overline{a})) = (n\overline{a}^{n-1} + (n-1)c_1\overline{a}^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\overline{1})d(a)$$

and, consequently, $d(a) = 0$. Hence θ is zero, a contradiction.

(1) and (3) are equivalent in view of Lemma 7. □

3 ARTINIAN d-RIGID RINGS

Recall that in a commutative local ring R can be introduced a topology by taking ideals

$$J(R), J(R)^2, \ldots, J(R)^n, \ldots$$

to be neighborhoods of zero. This generate the $J(R)$-adic topology. If, for any natural m,

$$a_k - a_l \in J(R)^m,$$

with k, l sufficiently large, then the sequence $\{a_n\}$ is called *regular*. A commutative local ring R is called *complete* if every regular sequence of R has a limit in R. Each commutative Artinian ring is complete. A *v-ring* is unramified complete regular local Noetherian domain of dimension one whose characteristic is different from that of its residue field [7, p.88].

Remark 1. *If the residue field W/pW of a v-ring W has a nonzero derivation d, then, by Proposition 2 of [9], there exists a nonzero derivation $D : W \to W$ such that*

$$D(a + pW) = d(a) + pW$$

for every $a \in W$ and $D(W) \not\subseteq pW$. Consequently,

$$D(p^{k-1}W) \not\subseteq p^k W$$

for any positive integer k.

Below we study the structure of a commutative Artinian ring with rigid derivations.

Lemma 10. *Let R be a local left Artinian ring. If in R all derivations are rigid, then in $R/\operatorname{ann} J(R)$ also.*

Proof. If, by contrary,

$$\mu : R/\operatorname{ann} J(R) \ni r + \operatorname{ann} J(R) \mapsto v_r + \operatorname{ann} J(R) \in R/\operatorname{ann} J(R) \qquad (2)$$

is a derivation such that $v_u \notin \operatorname{ann} J(R)$ and $uv_u \in \operatorname{ann} J(R)$ for some $0 \neq u \in R$, then the rule

$$\delta : R \ni r \mapsto j_0 v_r \ (r \in R),$$

with $j_0 v_u \neq 0$ and v_r as in (2), determines a derivation δ of R which is not rigid. □

If R is a ring of prime power characteristic p^n $(n \geq 2)$, then

$$\Omega_k = \Omega_k(R) = \{x \in R \mid p^k x = 0\} \ (1 \leq k \leq n).$$

Obviously, Ω_k is an ideal of R.

Remark 2. *Let R be a local ring and $d \in \operatorname{Der} R$. If $J(R) = 0$ or $d(J(R)) = 0$, then a derivation d is rigid.*

In fact, $R = J(R) \cup U(R)$. If $u \in U(R)$ (respectively $j \in J(R)$), then $d(u) = 0$ or $ud(u) \neq 0$ (respectively $d(j) = 0$). Hence R is d-rigid.

Lemma 11. *Let R be a local left Artinian ring. If in R all derivations are rigid and $J(R)^2 = 0$, then one of the following holds:*

(1) *R is a commutative ring,*

(2) *$d(J(R)) = 0$ and $d(R)J(R) = 0$ for any $d \in \operatorname{Der} R$,*

(3) *$C(R) = R$ and $J(R) \cap Z(R) = 0$.*

If R is a 2-torsion-free, then R is a skew field or $C(R) \neq R$.

Proof. Suppose that R is non-commutative (that is $C(R) \neq 0$) and $d \in \operatorname{Der} R$. Then $d(C(R)) \subseteq C(R)$. If $0 \neq c \in J(R) \cap Z(R)$, then $cd \in \operatorname{Der} R$ and

$$J(R) \cdot cd(J(R)) = 0,$$

and so $cd(J(R)) = 0$. This gives that $d(J(R)) \subseteq J(R)$. Since $J(R)d(J(R)) = 0$, we conclude that $d(J(R)) = 0$. Then

$$0 = d(RJ(R)) = d(R)J(R).$$

Assume that $J(R) \cap Z(R) = 0$. If $C(R) \subseteq J(R)$, then

$$C(R)d(C(R)) = 0$$

and consequently $C(R) \subseteq Z(R) \cap J(R)$, a contradiction with the assumption. Hence $C(R) \nsubseteq J(R)$ and and therefore $C(R) = R$. □

Proof of Theorem 1. By Lemma 10 we can assume that $J(R)^2 = 0$. We have two cases.

1) Let $\operatorname{char}(R) = \operatorname{char}(R/J(R))$. By Theorem 9 of [7], the ring

$$R = J(R) + T$$

is a group direct sum, where T is a subfield of R. Then, for every element $r \in R$, there exist unique elements $j \in J(R)$ and $t \in T$ such that

$$r = j + t. \qquad (3)$$

The rule

$$\delta(r) = j \ (r \in R),$$

with j as in (3), determines a derivation δ of R which is not rigid. Hence $J(R) = 0$.

2) Let $\operatorname{char}(R) = p^2$. By Theorem 11 of [7], the ring

$$R = J(R) + C$$

is a group sum, where C is a coefficient ring such that $C \cong W/p^2W$ for some v-ring W and $J(R) \cap C = pC$. Clearly, $\Omega_1 \leq J(R)$. If

$$\mu : R/\Omega_1 \ni r + \Omega_1 \mapsto a_r + \Omega_1 \in R/\Omega_1 \qquad (4)$$

is a non-rigid derivation, then there exists an element $v \in R$ such that $a_v \notin \Omega_1$ and $va_v \in \Omega_1$. Then the rule

$$\delta(r) = pa_r \ (r \in R),$$

with a_r as in (4), determines a nonzero derivation δ of R, where $\delta(v) \neq 0$ and $v\delta(v) = vpa_v = 0$, a contradiction. Hence in the quotient ring $\overline{R} = R/\Omega_1$ all derivations are rigid. From the part 1) it follows that $\overline{R}$ is a field and $J(R) = \Omega_1$. Since $\Omega_1 d(\Omega_1) = 0$ for all $d \in \operatorname{Der} R$, we see that $d(J(R)) = d(\Omega_1) = 0$. Obviously that $J(R) = J_1 \oplus pC$ is a group direct sum, where $J_1 \leq J(R)$ is some subgroup. Then

$$J_1 C = J_1 \oplus (pC \bigcap J_1 C)$$

is a group direct sum. If

$$0 \neq pc_0 \in J_1 C \bigcap pC$$

for some $c_0 \in C$, then $c_0 \in U(R)$ and $Cc_0 = C$. Then $pc_0 \in J_1 Cc_0$ and $pc_0 = j_1 c_1 c_0$ for some $j_1 \in J_1$ and $c_1 \in C$. From this it holds that

$$(p - j_1 c_1)c_0 = 0,$$

and, hence, $j_1 = pc_1^{-1} \in J_1 \cap pC = 0$, a contradiction. This yields that $J = J_1 C \oplus pC$ and $R = J_1 C \oplus C$ is a group direct sum. Then, for very element $r \in R$, there are unique elements $j \in J_1 C$ and $c \in C$ such that

$$r = j + c. \qquad (5)$$

The rule $\gamma(r) = j$ $(r \in R)$, with j as in (5), determines a nonzero derivation of R, where $\gamma(J(R)) \neq 0$, a contradiction. Thus $R = C$. If the residue field C/pC has a nonzero derivation d, then, in view of Remark 1, the ring C has a nonzero derivation D such that

$$D(C) \nsubseteq pC,$$

a contradiction. Hence, C/pC (and, by Proposition 3, the ring R) is differentially trivial.

REFERENCES

[1] Anderson D.F., Livingston P.S. *The zero-divisor graph of a commutative ring.* J. Algebra 1999, **217**, 434–437. doi:10.1006/jabr.1998.7840

[2] Artemovych O.D. *Differentially trivial and rigid rings of finite rank.* Period. Math. Hungar. 1998, **36**, 1–16. doi:10.1023/A:1004648818462

[3] Beidar K.I., Martindale W.S., Mikhalëv A.V. *Rings with generalized identities.* Marcel Dekker Inc., New York–Basel–Hong Kong, 1996.

[4] Bhat V.K. *Prime radical of Ore extensions over δ-rigid rings*. Algebra Discrete Math. 2009, **1**, 14–19.

[5] Brešar M. *A note on derivations*. Math. J. Okayama Univ. 1990, **32**, 83–88.

[6] Burkov V.D. *Stiff derivations of semiprime rings*. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 1987, **12**, 12–14. (in Russian)

[7] Cohen I.S. *On the structure and ideal theory of complete local rings*. Trans. Amer. Math. Soc. 1946, **59**, 54–106.

[8] Giambruno A., Herstein I.N. *Derivations with nilpotent values*. Rend. Circ. Mat. Palermo 1981, **30**, 199–206.

[9] Heerema N. *Derivations on p-adic fields*. Trans. Amer. Math. Soc. 1962, **102**, 346–351.

[10] Herstein I.N. *Noncommutative rings*. The Mathematical Association of America, J. Wiley and Sons, 1968.

[11] Herstein I.N. *Center-like elements in prime rings*. J. Algebra 1979, **60**, 567–574.

[12] Krempa J. *Some examples of reduced rings*. Algebra Colloq. 1996, **3** (4), 289–300.

[13] Lee T.-K., Lin J.-S. *A result on derivations*. Proc. Amer. Math. Soc. 1996, **124** (6), 1687–1691. Article stable URL: http://www.jstor.org/stable/2161976

[14] Mulay S.B. *Cycles and symmetries of zero-divisors*. Comm. Algebra 2002, **30** (7), 3533–3558. doi:10.1081/AGB-120004502

[15] Nowicki A. *Stiff derivations of commutative rings*. Colloq. Math. 1984, **48** (1), 7–16.

[16] Sharma P.K. *A note on automorphisms of local rings*. Comm. Algebra 2002, **30** (8), 3743–3747. doi:10.1081/AGB-120005816

Received 11.09.2014

Артемович О.Д., Лукашенко М.П. *Про жорсткі диференціювання кілець* // Карпатські матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 181–190.

Доведено, що в кільці R з одиницею існує елемент $a \in R$ та ненульове диференціювання $d \in \operatorname{Der} R$ такі, що $ad(a) \neq 0$. Кажуть, що R — d-жорстке кільце для деякого диференціювання $d \in \operatorname{Der} R$, якщо $d(a) = 0$ або $ad(a) \neq 0$ для усіх $a \in R$. Досліджено кільця із жорсткими диференціюваннями та встановлено, що комутативне артінове кільце R або має нежорстке диференціювання, або $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$ — пряма сума кілець $R_1, \ldots, R_n$, кожне з яких є полем або диференціально тривіальним v-кільцем. Доведення цього результату базується на тому факті, що в лівому досконалому кільці R з ненульовим радикалом Джекобсона $J(R)$ для будь-якого диференціювання $d \in \operatorname{Der} R$ такого, що $d(J(R)) = 0$, випливає, що $d = 0_R$ тоді і тільки тоді, коли фактор-кільце $R/J(R)$ — диференціально тривіальне поле.

Ключові слова і фрази: диференціювання, напівпервинне кільце, артінове кільце, досконале кільце.

Артемович О.Д., Лукашенко М.П. *О жестких дифференцированиях колец* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 181–190.

Доказано, что в кольце R с единицей существует элемент $a \in R$ и ненулевое дифференцирование $d \in \operatorname{Der} R$ такие, что $ad(a) \neq 0$. Кольцо R называется d-жестким кольцом для дифференцирования $d \in \operatorname{Der} R$, если $d(a) = 0$ или $ad(a) \neq 0$ для всех $a \in R$. Исследуются кольца с жесткими дифференцированиями и установлено, что коммутативное артиново кольцо R либо имеет нежесткое дифференцирование, либо $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$ — прямая сумма колец $R_1, \ldots, R_n$ каждое из которых является полем или дифференциально тривиальным v-кольцом. Доказательство этого результата основано на том, что в локальном кольце R с ненулевым радикалом Джекобсона $J(R)$ для любого дифференцирования $d \in \operatorname{Der} R$ такого, что $d(J(R)) = 0$, следует, что $d = 0_R$ тогда и только тогда, когда фактор-кольцо $R/J(R)$ — дифференциально тривиальное поле.

Ключевые слова и фразы: дифференцирование, полупервичное кольцо, артиново кольцо.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp

Carpathian Math. Publ. 2014, 6 (2), 191–195 Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.191–195

doi:10.15330/cmp.6.2.191-195

БАРАБАШ Г.М., ХОЛЯВКА Я.М.

НАБЛИЖЕННЯ МОДУЛЯРНИХ ІНВАРІАНТІВ, ПЕРІОДІВ ТА ЗНАЧЕНЬ ДВОХ ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЯКОБІ

Нехай $\operatorname{sn}_i(z)$, $i = 1, 2$, — алгебраїчно незалежні еліптичні функції Якобі. Отримано оцінку сумісного наближення модулярних інваріантів цих функцій, їх періодів, довільного числа α та значень кожної з цих функцій в періодах іншої та в точці α.

Ключові слова і фрази: сумісні наближення, еліптична функція Якобі.

Ivan Franko National University, 1 Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine

E-mail: galynabarabash71@gmail.com (Барабаш Г.М.), ya_khol@franko.lviv.ua (Холявка Я.М.)

ВСТУП

В роботах [1, 3, 4] наведено багато результатів, що дають оцінки сумісного наближення значень в алгебраїчних точках еліптичних функцій Вейєрштрасса з алгебраїчними інваріантами, значень цих функцій в періодах інших функцій тощо. У цій праці отримано оцінку сумісного наближення значень двох алгебраїчно незалежних функцій Якобі зі спільним періодом у довільній точці α та кожної з цих функцій у тому періоді іншої функції, який не є спільним для них, та їх модулярних інваріантів. Жодних припущень про алгебраїчну природу числа α, модулярних інваріантів та періодів немає. Розглянуто довільні фіксовані пари основних періодів цих двох функцій та накладено природну вимогу на них та на число α, яка дає змогу уникнути точок, що є полюсами функцій.

Розглянемо алгебраїчно незалежні еліптичні функції Якобі $\operatorname{sn}_1(z)$, $\operatorname{sn}_2(z)$ з модулярними інваріантами $\varkappa_1, \varkappa_2$ відповідно, $0 < \varkappa_1^2, \varkappa_2^2 < 1$, які мають спільний період. Позначимо через $(4K, 2iK_1)$ довільну фіксовану пару основних періодів функції $\operatorname{sn}_1(z)$, а через $(4K, 2iK_2)$ — функції $\operatorname{sn}_2(z)$ [5].

Надалі як і в [4] будемо позначати через $d(P)$, $L(P)$ степінь та довжину многочлена P; $\xi_1, \ldots, \xi_{10}$ — наближаючі алгебраїчні числа, $d_i = d(\xi_i)$ та $L_i = L(\xi_i)$ — їх степені та довжини відповідно, $d = \deg \mathbb{Q}(\xi_1, \ldots, \xi_{10})$. Нехай α таке довільне число, що точки $4nK + 2in_1K_1 + 2in_2K_2 + \alpha$ не є полюсами $\operatorname{sn}_1(z)$, $\operatorname{sn}_2(z)$ при усіх $n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$.

Теорема. *Для довільних алгебраїчних чисел $\xi_1, \ldots, \xi_{10}$ справджується*

$$\begin{aligned} \max \{ &|\alpha - \xi_1|, |K - \xi_2|, |K_1 - \xi_3|, |\varkappa_1 - \xi_4|, |\varkappa_2 - \xi_5|, |\operatorname{sn}_2(2iK_1) - \xi_6|, \\ &|\operatorname{sn}_1(\alpha) - \xi_7|, |\operatorname{sn}_2(\alpha) - \xi_8|, |K_2 - \xi_9|, |\operatorname{sn}_1(2iK_2) - \xi_{10}| \} > \exp(-\Lambda D^3), \end{aligned} \tag{1}$$

де $D^2 = d\left(\frac{\ln L_1}{d_1} + \cdots + \frac{\ln L_{10}}{d_{10}} + \ln d\right)$, $\Lambda > 0$ *— константа, залежна лише від чисел* $\varkappa_1, \varkappa_2$ *та* α.

УДК 511.3

2010 *Mathematics Subject Classification:* 11J82, 11J89.

ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ

Доводити теорему будемо методом Гельфонда–Чудновського, викладеним у [1,3].

Нехай λ — достатньо велике натуральне число, $c_1, c_2, \dots$ — додатні константи, які не залежать від d, d_i, L_i та λ.

Покажемо, що нерівність

$$\begin{gathered}\max\left\{|\alpha-\xi_1|, |K-\xi_2|, |K_1-\xi_3|, |\varkappa_1-\xi_4|, |\varkappa_2-\xi_5|, |\operatorname{sn}_2(2iK_1)-\xi_6|,\right.\\ \left.|\operatorname{sn}_1(\alpha)-\xi_7|, |\operatorname{sn}_2(\alpha)-\xi_8|\right\} < \exp\left(-\lambda^8 M^3\right),\end{gathered} \tag{2}$$

де

$$n = \deg \mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \xi_8), \quad M^2 = n\left(\frac{\ln L_1}{d_1} + \dots + \frac{\ln L_8}{d_8} + \ln n\right), \tag{3}$$

неможлива. Доводити будемо методом від супротивного. Покладемо

$$L = S = [\lambda^2 M], \quad N = [\lambda M]. \tag{4}$$

Позначимо через $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ лінійно незалежні серед чисел $\xi_1^{u_1}, \dots, \xi_8^{u_8}$, $u_i = 0, 1, \dots, d_i - 1$,

$$F(z) = \sum_{k,l_1,l_2=1}^{L} C_{k,l_1,l_2} z^k \operatorname{sn}_1^{l_1}(z)\operatorname{sn}_2^{l_2}(z), \quad C_{k,l_1,l_2} = \sum_{\tau=1}^{n} C_{k,l_1,l_2,\tau}\zeta_\tau, \quad C_{k,l_1,l_2,\tau} \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Нехай $\varphi_1(z) = \operatorname{sn}_2(z+K)$, $\varphi_2(w) = \operatorname{sn}_2(z+3K)$ [1]. Тоді

$$\operatorname{sn}_2(z+w) = \frac{\varphi_1(z)\varphi_2'(w) + \varphi_2(w)\varphi_1'(z)}{1 - \varkappa_2^2\varphi_1^2(z)\varphi_2^2(w)} = \frac{\Lambda_1(z,w)}{\Lambda_2(z,w)}. \tag{6}$$

Існують (див. [1]) такі многочлени $G_{s,p,l}$, що

$$G_{s,p,l} = \frac{d^s}{d\,w^s}(\Lambda_1^p(z,w)\Lambda_2^l(z,w))|_{w=0} \tag{7}$$

та справджуються оцінки $\ln L(G_{s,p,l}) \le s\ln(s(p+l) + c_1(s+p+l))$, $\deg G_{s,p,l} \le 4(p+l)$.

З (5)–(7) подібно, як у працях [1,6], отримаємо

$$F^{(s)}(z) = \frac{d^s}{d\,w^s}(\Lambda_2^{-L}(z,w)(F(z+w)\Lambda_2^L(z,w)))|_{w=0} = \sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}\left(\frac{d^{s-t}}{d\,w^{s-t}}\Lambda_2^{-L}(z,w)\right)|_{w=0}$$

$$\times \sum_{k,l_1,l_2=1}^{L} C_{k,l_1,l_2}\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i}\left(\frac{d^{t-i}}{d\,w^{t-i}}(z+w)^k\operatorname{sn}_1^{l_1}(z+w)\right)|_{w=0}G_{i,l_2,L-l_2}(z). \tag{8}$$

Позначимо

$$F_{s,t}(z) = \sum_{k,l_1,l_2=1}^{L} C_{k,l_1,l_2}\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i}\left(\frac{d^{t-i}}{d\,w^{t-i}}(z+w)^k\operatorname{sn}_1^{l_1}(z+w)\right)|_{w=0}G_{i,l_2,L-l_2}(z). \tag{9}$$

Визначимо наближаючі алгебраїчні числа $\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{13}$ так: $\xi_{11}^2 = (1-\xi_7^2)(1-\xi_4^2\xi_7^2)$, $\xi_{12}^2 = (1-\xi_8^2)(1-\xi_5^2\xi_8^2)$, $\xi_{13}^2 = (1-\xi_6^2)(1-\xi_5^2\xi_6^2)$. Для короткого запису $\xi_1, \dots, \xi_8, \xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{13}$ будемо використовувати $\tilde{\xi}$. Через $F_{s,n,n_1}(\tilde{\xi})$ та $F_{s,t,n,n_1}(\tilde{\xi})$ позначимо вирази, отримані з

$F^{(s)}(4nK + 2in_1K_1 + \alpha)$ та $F_{s,t}(4nK + 2in_1K_1 + \alpha)$ заміною чисел α, $4K$, $2iK_1$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\operatorname{sn}_2(2iK_1)$, $\operatorname{sn}_1(\alpha)$, $\operatorname{sn}_2(\alpha)$, $\operatorname{sn}_1'(\alpha)$, $\operatorname{sn}_2'(\alpha)$, $\operatorname{sn}_2'(2iK_1)$ числами $\tilde{\xi}$ відповідно.

Розглянемо $F_{s,t,n,n_1}(\tilde{\xi})$, $1 \le n, n_1 \le N$, $0 \le t \le s \le S$, як N^2S лінійних форм від nKL^2 змінних $C_{k,l_1,l_2,\tau}$. Згідно [7, лема 4.1] та (4), (9), виберемо не всі рівні нулю числа $C_{k,l_1,l_2,\tau}$ так, що для $1 \le n, n_1 \le N$, $0 \le t \le s \le S$

$$F_{s,t,n,n_1}(\tilde{\xi}) = 0, \quad 0 < |C_{k,l_1,l_2,\tau}| < \exp(c_2\lambda^3 n^{-1}M^3). \tag{10}$$

З (2), (3), (4), (10) при $1 \le n, n_1 \le \lambda N$, $0 \le s \le S$ отримаємо

$$|F^{(s)}(4nK + 2in_1K_1 + \alpha) - F_{s,n,n_1}(\tilde{\xi})| < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^8 M^3). \tag{11}$$

З (8)–(11), якщо $1 \le n, n_1 \le N$, $0 \le s \le S$, дістанемо

$$|F^{(s)}(4nK + 2in_1K_1 + \alpha)| < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^8 M^3). \tag{12}$$

Покажемо, що оцінка (12) виконується також і для $1 \le n, n_1 \le \lambda N$, $0 \le s \le S$. Для цього скористаємося методом математичної індукції. Нехай при $0 \le s \le S$ нерівність (12) справджується для $1 \le n, n_1 \le 2^d N$, $2^d \le \lambda$. Доведемо, що тоді вона справджується і для $1 \le n, n_1 \le 2^{d+1}N$.

Позначимо $(2\omega_{1,i}, 2\omega_{3,i})$ пару основних періодів функції Вейєрштрасса $\wp_i(z)$, якій відповідає $\operatorname{sn}_i(z)$, $e_{1,i} = \wp(\omega_{1,i})$, $e_{3,i} = \wp(\omega_{3,i})$, $i = 1, 2$. Покладемо

$$G(z) = F(z)\sigma_1^L\left((z + iK_1')/\sqrt{e_{1,1} - e_{3,1}}\right)\sigma_2^L\left((z + iK_2')/\sqrt{e_{1,2} - e_{3,2}}\right). \tag{13}$$

Виберемо таке найменше можливе ціле r, що $r > 16(2^d N + 1)(|K| + |K_1| + |K_2| + |\alpha|)$. Позначимо $R = 4r$. Тоді з (3), (4), (5), (10), (13) випливає

$$|G(z)|_{|z| \le R} < \exp(-c_3 2^d \lambda^4 M^3). \tag{14}$$

З [7, лема 4.5] та (14) при $0 \le s \le S$ отримаємо

$$|G^{(s)}(z)|_{|z| \le r} < \exp(-2^d \lambda^5 M^3). \tag{15}$$

Так як $4nK + 2in_1K_1 + \alpha$ не є полюсами $\operatorname{sn}_1(z)$ та $\operatorname{sn}_2(z)$, то для $\varepsilon = R^{-1}$ в ε-околах $V(\varepsilon, 4nK + 2in_1K_1 + \alpha)$ точок $4nK + 2in_1K_1 + \alpha$ при $1 \le n, n_1 \le \lambda N$ з (4) отримаємо

$$|\sigma_1^L\left((z + iK_1')/\sqrt{e_{1,1} - e_{3,1}}\right)|_{z \in V(\varepsilon, 4nK + 2in_1K_1 + \alpha)} > \exp(-c_4\lambda^4 M^2). \tag{16}$$

З (15), (16) при $1 \le n, n_1 \le \lambda N$ випливає

$$|F(z)|_{z \in V(\varepsilon, 4nK + 2in_1K_1 + \alpha)} < \exp(-2^{2d-1}\lambda^5 M^3). \tag{17}$$

З (14)–(16) для $1 \le n, n_1 \le 2^{d+1}N$, $0 \le s \le S$, отримаємо

$$|F^{(s)}(4nK + 2in_1K_1 + \alpha)| < \exp(-\frac{2^d\lambda^5}{3}M^3). \tag{18}$$

Враховуючи (11), для $1 \le n, n_1 \le 2^{d+1}N$ та $0 \le s \le S$ з (18) випливає

$$|F_{s,n,n_1}(\tilde{\xi})| < \exp(-\frac{2^d\lambda^5}{4}M^3). \tag{19}$$

Розглядаючи $F_{s,t,n,n_1}(\widetilde{\xi})$, $0 \le t \le s \le S$, $1 \le n, n_1 \le 2^{d+1}N$, як значення відповідного многочлена в алгебраїчних точках, з [7, лема 4.1], (3) та (4) отримаємо для $F_{s,t,n,n_1}(\widetilde{\xi}) \neq 0$ оцінку $|F_{s,t,n,n_1}(\widetilde{\xi})| > \exp(-\lambda^{3,5}M^3)$, тому

$$|F_{s,n,n_1}(\widetilde{\xi})| > \exp(-\lambda^4 M^3). \tag{20}$$

Оцінки (19) та (20) суперечливі, тому для $1 \le n, n_1 \le 2^{d+1}N$, $0 \le t \le s \le S$, отримаємо $F_{s,n,n_1}(\widetilde{\xi}) = 0$, що разом з (11) доводить (12) для $1 \le n, n_1 \le \lambda N$, $0 \le s \le S$.

Оцінимо $|C_{k,l_1,l_2,\tau}|$ зверху. Покладемо

$$\alpha_t = \left(1 - \frac{t}{\lambda L}\right)\frac{4K + 2iK_1 + \alpha}{4}, \quad t = 1, \dots, L. \tag{21}$$

З (4), (21) випливає

$$|\operatorname{sn}(\alpha_t) - \operatorname{sn}(\alpha_j)| > \exp(-\lambda \ln M), \ t \neq j. \tag{22}$$

З [2, лема 4] отримаємо таке: нехай $F(z)$ визначена в (5),

$$\Delta = \det(\operatorname{sn}_1^{l_1}(\alpha_t))_{l_1,t=1,\dots,L}, \qquad \Delta(t) = \det(\operatorname{sn}_2^{l_2}(2in_1K_1 + \alpha_t))_{l_2,n_1=1,\dots,L},$$

$$\Delta(n_1, t) = \det((4nK + 2in_1K_1 + \alpha_t)^k)_{n,k=1,\dots,L},$$

$\Delta_{l_1,t}$ — алгебраїчне доповнення елемента $\operatorname{sn}_1^{l_1}(\alpha_t)$ визначника Δ, $\Delta_{l_2,n_1}(t)$ — елемента $\operatorname{sn}_2^{l_2}(2in_1K_1 + \alpha_t)$ визначника $\Delta(t)$, $\Delta_{k,n}(n_1,t)$ — елемента $(4nK + 2in_1K_1 + \alpha_t)^k$ визначника $\Delta(n_1,t)$. Якщо Δ, $\Delta(t)$ та $\Delta(n_1,t) \neq 0$, то

$$C_{k,l_1,l_2} = \sum_{t,\,n,\,n_1=1}^{L} \frac{\Delta_{l_1,t}}{\Delta}\frac{\Delta_{l_2,n_1}(t)}{\Delta(t)}\frac{\Delta_{k,n}(n_1,t)}{\Delta(n_1,t)}F(4nK + 2in_1K_1 + \alpha_t). \tag{23}$$

З (21), (22) випливає, що Δ, $\Delta(t)$ та $\Delta(n_1,t)$, які є визначниками Вандермонда, відмінні від нуля. Використовуючи [3, лема 5.7], співвідношення (4), (22), отримаємо

$$\left|\frac{\Delta_{l_1,t}}{\Delta}\right|, \left|\frac{\Delta_{l_2,n_1}(t)}{\Delta(t)}\right|, \left|\frac{\Delta_{n,k}(n_1,t)}{\Delta(n_1,t)}\right| < \exp(c_5\lambda^3 N \ln N). \tag{24}$$

Для $1 \le n, n_1 \le L$, $z = 4nK + 2in_1K_1 + \alpha_t$ справджується $\min|\sigma^L(z)| > \exp(-c_6\lambda^6M^3)$, тому з (17) при $(1/2)\lambda \le 2^d \le \lambda$ отримаємо $|f(4nK + 2in_1K_1 + \alpha_t)| < \exp(-(1/4)\lambda^7M^3)$. Звідси і з (23), (24) випливає

$$|C_{k,l_1,l_2}| < \exp(-\lambda^6 M^3). \tag{25}$$

Розглядаючи C_{k,l_1,l_2} як значення відповідного многочлена (5) $\mathrm{P}_{k,p,l} \in \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_8]$ в точці $\zeta_1, \dots, \zeta_8$ і використовуючи (4) та [7, лема 4.1], для $C_{k,l_1,l_2} \neq 0$ отримаємо оцінку $|C_{k,l_1,l_2}| > \exp(-\lambda^4 M^3)$, що суперечить оцінці (25). Тому всі C_{k,l_1,l_2} дорівнюють нулеві. Але тоді з (5) і всі $C_{k,l_1,l_2,\tau}$ дорівнюють нулеві, що суперечить (10). Останнє протиріччя показує, що (2) не справджується, тобто оцінка, подібна (1), справджується при сумісному наближенні чисел $\alpha, K, K_1, \varkappa_1, \varkappa_2, \operatorname{sn}_2(2iK_1), \operatorname{sn}_1(\alpha), \operatorname{sn}_2(\alpha)$. Якщо в (2) замінити K_1 на K_2 і $\operatorname{sn}_2(2iK_1)$ на $\operatorname{sn}_1(2iK_2)$ та розглядати точки $4nK + 2in_2K_2 + \alpha$, то отримаємо, що припущення (2) не справджується також і для чисел $\alpha, K, K_2, \varkappa_1, \varkappa_2, \operatorname{sn}_1(2iK_2), \operatorname{sn}_1(\alpha)$, $\operatorname{sn}_2(\alpha)$, тобто для обох цих множин чисел справджується оцінка, подібна (1). Отже, при достатньо великому Λ справджується оцінка (1), що й потрібно було довести.

REFERENCES

[1] Chudnovsky G.V. *Algebraic independence of the values of elliptic functions at algebraic points; Elliptic analogue of the Lindemann–Weierschtrass theorem*. Invent. Math. 1980, **61**, 267–290.

[2] Fel'dman N.I. *Algebraic independence of certain numbers*. Vestn. Mosk. Univ. 1980, **4**, 46–50. (in Russian)

[3] Fel'dman N.I. Hilbert's seventh problem. Mosk. Gos. Univ., Moskow, 1982. (in Russian)

[4] Fel'dman N.I., Nesterenko Yu.V. Transcendental Numbers. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[5] Lawden D.F. Elliptic functions and applications. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[6] Nesterenko Yu.V. *On a measure of algebraic independence of values of an elliptic function*. Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 1995, **59** (4), 155–178. (in Russian)

[7] Reyssat E. *Approximation algebrique de nombres lies aux fonctions elliptique et exp*. Bull. Soc. Math. France. 1980, **1**, 47–79.

Надійшло 19.09.2014

Barabash G.M, Kholyavka Y.M. *Approximation of modulus, periods and values of two Jacobi elliptic functions*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 191–195.

Let $\operatorname{sn}_i(z)$, $i = 1, 2$, be algebraically independent Jacobi elliptic functions. We obtain an estimation of a simultaneous approximation of modulus of these functions, their periods, arbitrary number α and the values of each of these functions at the periods of the other function and at the point α.

Key words and phrases: simultaneous approximations, Jacobi elliptic function.

Барабаш Г.М., Холявка Я.М. *Приближения модулярных инвариантов, периодов и значений двух эллиптических функций Якоби* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 191–195.

Пусть $\operatorname{sn}_i(z)$, $i = 1, 2$, — алгебраически независимые эллиптичекие функции Якоби. Получено оценку совместного приближения модулярных инвариантов этих функций, их периодов, произвольного числа α и значений каждой из этих функций в периодах другой и в точке α.

Ключевые слова и фразы: совместные приближения, эллиптичекая функция Якоби.

ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, 6 (2), 196–202
doi:10.15330/cmp.6.2.196-202

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.196–202

Глушак І.Д.

НАБЛИЖЕННЯ ЄМНОСТЕЙ НА МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРАХ ЛІПШИЦЕВИМИ ЄМНОСТЯМИ

Для довільної ємності на просторі з обмеженою метрикою доведено існування і отримано явний вигляд найближчих до неї ємностей, ліпшицевих з даним коефіцієнтом.

Ключові слова і фрази: відстань Гаусдорфа, регулярна щодо метрики ємність, ліпшицева ємність.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, 57 Shevchenka str., 76018, Ivano-Frankivsk, Ukraine
E-mail: inna_gl@rambler.ru

Вступ

Запроваджені Шоке [1] ємності (неадитивні міри) знайшли численні застосування у різних галузях. Простори регулярних неадитивних мір на компактах детально вивчено Зарічним та Никифорчиним [2]. Результати, отримані для компактів, узагальнили та поширили на неадитивні міри на тихоновських просторах Никифорчин та Реповш [3]. Властивості типу регулярності (регулярність щодо метрики, щодо топології, ω-гладкості, τ-гладкості) для ємностей, визначених на метричних (не обов'язково компактних) та метризовних просторах досліджено Черковським [4]. Зокрема, описано метрики на просторі ємностей у стилі Прохорова та Зарічного (Канторовича-Рубінштейна) та доведена їх еквівалентність (а з певною модифікацією — і рівність) для випадку, коли вихідний простір є повним.

З потреб практики виникає необхідність виражати або наближати певні ємності за допомогою емностей, які мають деякі специфічні властивості або простішу будову. В даній праці досліджується клас ліпшицевих ємностей на метричних просторах. Вони характеризуються наступною "гарною" властивістю: при незначній зміні множини значення ємності на цій множині суттєво не змінюється, тому задача апроксимації довільної ємності на метричному просторі ліпшицевими ємностями є досить актуальною. Саме ця проблема є ключовою у даній статті.

1 Метрика на множині ємностей

Надалі вважаємо, що (X,d) — метричний простір скінченного діаметра. Як звичайно, для $x \in X$ та $A \subset X$ величину $d(x,A) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}$ називаємо відстанню від точки x до множини A. Множини

$$O_\varepsilon A = \{x \in X \mid d(x,A) < \varepsilon\}, \qquad \text{де} \quad A \subset X,\ \varepsilon > 0,$$

УДК 515.12, 517.518.11
2010 *Mathematics Subject Classification:* 25C15, 28E10.

та

$$\overline{O}_\varepsilon A = \{x \in X \mid d(x,A) \leqslant \varepsilon\}, \qquad \text{де} \quad A \subset X,\ \varepsilon \geqslant 0,$$

називаємо відповідно відкритим ε-околом та замкненим ε-околом множини A. Очевидно, що вони дійсно є відповідно відкритою та замкненою множиною, оскільки $d(x,A)$ неперервно залежить від x при фіксованому A. Зокрема, через $O_\varepsilon(\{a\}) = B_\varepsilon(a)$ та $\overline{O}_\varepsilon(\{a\}) = \bar{B}_\varepsilon(a)$ позначаємо відкриту та замкнену кулю радіуса ε з центром у точці $a \in X$.

На множині $\exp X$ непорожніх замкнених підмножин вживаємо стандартну метрику Гаусдорфа

$$d_H(A,B) = \max\big\{\sup\{d(a,B) \mid a \in A\}, \sup\{d(b,A) \mid b \in B\}\big\}.$$

Наступні формули для d_H є рівносильними:

$$d_H(A,B) = \min\{\varepsilon \geqslant 0 \mid A \subset \overline{O}_\varepsilon B, B \subset \overline{O}_\varepsilon A\},$$
$$d_H(A,B) = \inf\{\varepsilon \geqslant 0 \mid A \subset \bigcup_{b\in B} \bar{B}_\varepsilon(b), B \subset \bigcup_{a\in A} \bar{B}_\varepsilon(a)\},$$
$$d_H(A,B) = \inf\{\varepsilon \geqslant 0 \mid A \subset \bigcup_{b\in B} B_\varepsilon(b), B \subset \bigcup_{a\in A} B_\varepsilon(a)\}.$$

Зауважимо, що у другій (але не третій) формулі inf можна замінити на min для компактного простору X, оскільки у такому просторі $\overline{O}_\varepsilon A = \bigcup_{a\in A} \bar{B}_\varepsilon(a)$ для кожної замкненої $A \subset X$.

Надалі розглядаємо клас ємностей [2] на просторі (X,d), регулярних щодо метрики d, тобто таких монотонно неспадних дійснозначних функцій c на сукупності $\operatorname{Exp} X$ всіх замкнених підмножин простору X, що $c(\varnothing) = 0$, і $c(\overline{O}_\varepsilon A) \to c(A)$ при $\varepsilon \to +0$ для кожної замкненої $A \subset X$. Вважаючи d фіксованою, у звичайному позначенні цього класу $\bar{M}_d X$ опускаємо d і пишемо $\bar{M}X$.

Кожна така ємність c цілком визначається своїм підграфіком

$$\operatorname{sub} c = \big\{(F,\alpha) \in \exp X \times I \mid \alpha \leqslant c(F)\big\},$$

який є замкненим у $\exp X \times I$ з метрикою прямого добутку

$$\rho\big((F,\alpha),(G,\beta)\big) = \max(d_H(F,G), |\alpha - \beta|).$$

Відповідно відстань $\hat{d}(c_1,c_2)$ між ємностями $c_1, c_2 \in \bar{M}X$ природно означається як відстань Гаусдорфа $\rho_H(\operatorname{sub} c_1, \operatorname{sub} c_2)$ між їх підграфіками. Оскільки діаметр X скінченний, то значення $\hat{d}$ теж скінченні.

Неважко помітити, що $\hat{d}(c_1,c_2)$ є точною нижньою гранню множини всіх таких $\varepsilon \geqslant 0$, що для кожної $A \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$ виконано нерівності

$$c_1(\overline{O}_\varepsilon A) + \varepsilon \geqslant c_2(A), c_2(\overline{O}_\varepsilon A) + \varepsilon \geqslant c_1(A)$$

(у такому випадку кажемо, що ємності c_1 та c_2 є *ε-близькими*). Тоді $\hat{d}(c_1,c_2) \leqslant \varepsilon$, якщо і тільки якщо для всіх $\varepsilon' > \varepsilon$, $A \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$ виконано

$$c_1(\overline{O}_{\varepsilon'} A) + \varepsilon' \geqslant c_2(A), c_2(\overline{O}_{\varepsilon'} A) + \varepsilon' \geqslant c_1(A).$$

Остання точна нижня грань досягається для компактного простору, і, ширше, для кожного (X,d), у якому $d_H(\overline{O}_{\varepsilon'} A, \overline{O}_\varepsilon A) \to 0$ при $\varepsilon' \searrow \varepsilon$ для всіх $A \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$, $\varepsilon > 0$ (зауважимо, що при $\varepsilon = 0$ збіжність є автоматичною). У такому просторі $\hat{d}(c_1, c_2) \leqslant \varepsilon$, якщо і тільки якщо c_1 та c_2 ε-близькі.

Іншою достатньою умовою того, що ємності c_1 та c_2 є ε-близькими для $\varepsilon = \hat{d}(c_1, c_2)$, є їх ω-гладкість, тобто рівність $c_i(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} c_i(A_n)$, $i = 1, 2$, для кожної незростаючої послідовності $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ замкнених множин у X. Ця властивість є сильнішою від регулярності щодо метрики.

2 Наближення ліпшицевими ємностями

Нагадаємо, що (X, d) — метричний простір скінченного діаметра.

Клас ліпшицевих з коефіцієнтом $q > 0$ ємностей — це множина

$$\overline{M}_q X = \{c \in \overline{M}X \mid \forall F, G \underset{\text{cl}}{\subset} X \quad |c(F) - c(G)| \leq q \cdot d_H(F, G)\},$$

де $q > 0$ — деяке фіксоване дійсне значення. Зрозуміло, що рівносильно умову ліпшицевості можна записати як

$$\forall F, G \underset{\text{cl}}{\subset} X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad d_H(F, G) \leq \varepsilon \Rightarrow |c(F) - c(G)| \leq q\varepsilon$$

або

$$\forall F \underset{\text{cl}}{\subset} X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad c(\bar{O}_\varepsilon(F)) \leqslant c(F) + q\varepsilon.$$

Очевидно, що ліпшицевість сильніша від інших властивостей типу регулярності [4] — регулярності щодо метрики, регулярності щодо топології, ω-гладкості та τ-гладкості. Простий приклад ємності, ліпшицевої з коефіцієнтом 2 — це функція, яка зіставляє кожній замкненій підмножині її діаметр.

Теорема 1. *$\overline{M}_q X$ — замкнений підпростір простору $\overline{M}X$ з метрикою $\hat{d}$.*

Доведення. Достатньо показати, що довільна ємність c_0, яка є точкою дотику множини $\overline{M}_q X$, належить до неї. Нехай $F \underset{\text{cl}}{\subset} X$, $\varepsilon > 0$. За припущенням для кожного $\delta > 0$ існує $c \in \overline{M}_q X$, для якого $\hat{d}(c_0, c) \leqslant \delta$. Звідси

$$c_0(\bar{O}_\varepsilon F) \leqslant c(\bar{O}_\delta(\bar{O}_\varepsilon F)) + \delta \leqslant c(\bar{O}_{\delta+\varepsilon} F) + \delta \leqslant c(F) + q(\delta + \varepsilon) + \delta \leqslant c_0(\bar{O}_\delta F) + 2\delta + q(\delta + \varepsilon).$$

Оскільки при $\delta \to 0$ останній вираз прямує до $c_0(F) + q\varepsilon$, маємо $c_0 \in \overline{M}_q X$. □

Розглянемо задачу про апроксимацію довільної ємності $c \in \overline{M}X$ ємностями з класу $\overline{M}_q X$.

Лема 2.1. *Для фіксованої непорожньої множини $G \underset{\text{cl}}{\subset} X$ функції на* Exp *X, рівні нулю для аргумента $\varnothing$ і визначені для непорожньої $F \underset{\text{cl}}{\subset} X$ формулами*

$$\varphi(F) = q \sup_{x\in F} d(x, G) \qquad \text{та} \qquad \psi(F) = \max\{a - q \sup_{x\in G} d(x, F), 0\},$$

де $a \geqslant 0$, є ліпшицевими з коефіцієнтом q ємностями.

Доведення. Достатньо зауважити, що вирази $\inf_{x\in F} d(x, G)$ та $\sup_{x\in F} d(x, G)$, а тому й $\sup_{x\in G} d(x, F)$, є ліпшицевими щодо F з коефіцієнтом 1. Виконання інших властивостей очевидне. □

Зауважимо, що поаргументний інфімум довільної сім'ї ємностей з $\overline{M}_q X$ та поаргументний супремум довільної обмеженої згори сім'ї ємностей з $\overline{M}_q X$ теж є ємностями з цього ж класу. Звідси випливає, що при фіксованих $\varepsilon, q \geq 0$ та $c \in \overline{M}X$ функції

$$\overset{-q}{c}_\varepsilon(F) = \sup_{A \underset{\text{cl}}{\subset} X} \{\max\{c(A) - \varepsilon - q \sup_{x\in \overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, F), 0\}\}$$

та

$$\overset{+q}{c}_\varepsilon(F) = \inf_{B \underset{\text{cl}}{\subset} X} \{c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + \varepsilon + q \sup_{x\in F} d(x, B)\},$$

де $F \neq \varnothing$, і $\overset{-q}{c}_\varepsilon(\varnothing) = \overset{+q}{c}_\varepsilon(\varnothing) = 0$, є ліпшицевими з коефіцієнтом q ємностями.

Теорема 2. *Функції $\overset{-q}{c}_\varepsilon$ та $\overset{+q}{c}_\varepsilon$ — це такі елементи $\overline{M}_q X$, що довільна ємність $c_0 \in \overline{M}_q X$ є ε-близькою до даної ємності c, якщо і тільки якщо $\overset{-q}{c}_\varepsilon \leq c_0 \leq \overset{+q}{c}_\varepsilon$.*

Доведення. Належність $\overset{-q}{c}_\varepsilon, \overset{+q}{c}_\varepsilon \in \overline{M}_q X$ обґрунтовано вище.

Припустимо, що $c \in \overline{M}X$ та $c_0 \in \overline{M}_q X$ є ε-близькими. Тоді, зафіксувавши $F \underset{\text{cl}}{\subset} X$ та обравши довільні $A \underset{\text{cl}}{\subset} X$ та $\delta > 0$ такі, що $\overline{O}_\varepsilon(A) \subset \overline{O}_\delta(F)$, отримаємо

$$c(A) - \varepsilon \leq c_0(\overline{O}_\varepsilon(A)) \leq c_0(\overline{O}_\delta(F)) \leq c_0(F) + q\delta,$$

тобто $c_0(F) \geq c(A) - \varepsilon - q\delta$. Зокрема, якщо покласти $\delta = \sup_{x\in\overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, F)$, то можна стверджувати, що при всіх $A \underset{\text{cl}}{\subset} X$ будуть виконуватись нерівності

$$c_0(F) \geq c(A) - \varepsilon - q \sup_{x\in\overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, F).$$

Звідси

$$c_0(F) \geq \sup_{A \underset{\text{cl}}{\subset} X} \{c(A) - \varepsilon - q \sup_{x\in\overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, F)\}$$

тобто $c_0 \geq \overset{-q}{c}_\varepsilon$.

Майже аналогічно, зафіксуємо множину $F \underset{\text{cl}}{\subset} X$ та оберемо довільні $B \underset{\text{cl}}{\subset} X$ та $\delta > 0$ такі, що $F \subset \overline{O}_\delta(B)$. Оскільки $c_0 \in M_q X$, то $c_0(F) \leq c_0(\overline{O}_\delta(B)) \leq c_0(B) + q\delta$. Якщо $\delta = \sup_{x\in F} d(x, B)$, то остання нерівність набуде вигляду $c_0(F) \leq c_0(B) + q \sup_{x\in F} d(x, B)$. Крім того, $\hat{d}(c, c_0) \leq \varepsilon$, тобто $c_0(B) \leq c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + \varepsilon$. Отже можна стверджувати, що для всіх $B \underset{\text{cl}}{\subset} X$ виконується $c_0(F) \leq c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + \varepsilon + q \sup_{x\in F} d(x, B)$, тому

$$c_0(F) \leq \inf_{B \underset{\text{cl}}{\subset} X} \{c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + \varepsilon + q \sup_{x\in F} d(x, B)\},$$

тобто $c_0 \leq \overset{+q}{c}_\varepsilon$.

Отже, виконання нерівностей $\overset{-q}{c}_\varepsilon \leq c_0 \leq \overset{+q}{c}_\varepsilon$ необхідне для ε-близькості c та c_0.

Доведемо достатність. Нехай $c_0 \geq \overset{-q}{c}_\varepsilon$. Тоді для фіксованої $F \underset{\text{cl}}{\subset} X$ та довільної $A \underset{\text{cl}}{\subset} X$ правильні нерівності

$$c_0(\overline{O}_\varepsilon(F)) \geq \overset{-q}{c}_\varepsilon(\overline{O}_\varepsilon(F)) \geq c(A) - \varepsilon - q \sup_{x\in\overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, \overline{O}_\varepsilon(F)).$$

Звідси при $A = F$ отримаємо $c_0(\overline{O}_\varepsilon(F)) \geq c(F) - \varepsilon$.

Якщо $c_0 \leq \overset{+q}{c}_\varepsilon$, то при будь-яких $B \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$ буде виконуватись

$$c_0(F) \leq c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + \varepsilon + q \sup_{x \in F} d(x, B).$$

Зокрема, при $B = F$ отримаємо $c_0(F) \leq c(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon$.

Отже, за умови $\overset{-q}{c}_\varepsilon \leq c_0 \leq \overset{+q}{c}_\varepsilon$ маємо ε-близькість c та c_0. □

Зауваження 2.1. *Зрозуміло, що для довільної ємності $c \in \overline{M}X$ існує ε-близький елемент $c_0 \in \overline{M}_qX$ тоді і тільки тоді, коли виконано $\overset{-q}{c}_\varepsilon \leq \overset{+q}{c}_\varepsilon$. У цьому випадку можна покласти, наприклад, $c_0 = \overset{-q}{c}_\varepsilon$ чи $c_0 = \overset{+q}{c}_\varepsilon$.*

Теорема 3. *Для довільної ємності $c \in \overline{M}X$ існує ε-близький елемент c_0 підпростору $\overline{M}_qX$ (де $\varepsilon \geqslant 0$), якщо і тільки якщо нерівність*

$$c(A) \leq c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + q \sup_{x \in \overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, B) + 2\varepsilon$$

виконано для всіх непорожніх $A, B \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$.

Доведення. Нехай $\varepsilon \geq 0$ таке, що $\overset{-q}{c}_\varepsilon \leq \overset{+q}{c}_\varepsilon$, тобто $\overset{-q}{c}_\varepsilon(F) \leq \overset{+q}{c}_\varepsilon(F)$ для довільної $F \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$. Остання нерівність рівносильна виконанню нерівності

$$c(A) - \varepsilon - q \sup_{x \in \overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, F) \leq c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + \varepsilon + q \sup_{x \in F} d(x, B)$$

для кожних непорожніх замкнених підмножин A, B простору X. Зрозуміло, що при $F = B$ вона матиме вигляд

$$c(A) - \varepsilon - q \sup_{x \in \overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, B) \leq c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + \varepsilon.$$

Отже необхідною умовою для $\overset{-q}{c}_\varepsilon \leq \overset{+q}{c}_\varepsilon$ є виконання при довільних $A, B \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$ нерівності

$$c(A) \leq c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + q \sup_{x \in \overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, B) + 2\varepsilon.$$

Покажемо, що вона також є достатньою умовою. Дійсно, якщо $F \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$, то для довільних $x \in \overline{O}_\varepsilon(A)$ та $y \in F$ істинною є нерівність $d(x, B) \leq d(x, F) + d(y, B)$. Тоді виконано

$$c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + \varepsilon \geq c(A) - \varepsilon - q \sup_{x \in \overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, B) \geq c(A) - \varepsilon - q\Big(\sup_{x \in \overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, F) + \sup_{y \in F} d(y, B)\Big).$$

Звідси

$$\inf_{B \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X} \{c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + \varepsilon + q \sup_{y \in F} d(y, B)\} \geq c(A) - \varepsilon - q \sup_{x \in \overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, F)$$

для всіх $A, B \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$. Отже, $\overset{+q}{c}_\varepsilon(F) \geq \overset{-q}{c}_\varepsilon(F)$, що, згідно зауваження 2.1, означає існування ε-близького елемента $c_0 \in \overline{M}_qX$. □

З останньої теореми негайно випливає, що відстань від ємності $c \in \overline{M}X$ до підпростору $\overline{M}_qX$ рівна точній нижній грані ε_q множини

$$E_q = \{\varepsilon \geq 0 \mid \forall A, B \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X : c(A) \leq c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + q \sup_{x \in \overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, B) + 2\varepsilon\}.$$

Якщо $\varepsilon_q = \min E_q$, то найближчі до $c \in \overline{M}X$ ємності c_0 з підпростору $\overline{M}_qX$ визначаються нерівністю $\overset{-q}{c}_{\varepsilon_q} \leq c_0 \leq \overset{+q}{c}_{\varepsilon_q}$.

Однак наступний приклад свідчить, що мінімум множини E_q може й не існувати.

Приклад 1. *Розглянемо підпростір $X = \{(0, -1), (0, 1)\} \cup ((0; 1] \times \{0\})$ площини $\mathbb{R}^2$ з евклідовою метрикою і покладемо*

$$c(F) = \begin{cases} 3, & (0,1) \in F \text{ або } (1,0) \in F, \\ 0, & (0,1) \notin F \;\text{ і }\; (1,0) \notin F, \end{cases} \qquad F \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X.$$

Очевидно, що c — регулярна ємність, яка не є ліпшицевою з коефіцієнтом $q = 1$. При кожному $\varepsilon > 1$ нерівність

$$c(A) \leq c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + \sup_{x \in \overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, B) + 2\varepsilon$$

істинна для всіх замкнених непорожніх підмножин A, B простору X, однак для $\varepsilon = 1$ вона є хибною для $A = \{(1, 0)\}$, $B = \{(0, -1)\}$.

Це означає, що відстань від c до підпростору $\overline{M}_qX$ рівна 1, але 1-близької до c ємності з $\overline{M}_qX$ не існує.

Розглянемо, за яких умов можна гарантувати існування найменшого елемента у E_q. Якщо спадна послідовність елементів $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ множини E_q збігається до ε_0, то для збіжностей $c(\overline{O}_{\varepsilon_n}(F)) \to c(\overline{O}_{\varepsilon_0}(F))$ та $\sup_{x \in \overline{O}_{\varepsilon_n} F} d(x, B) \to \sup_{x \in \overline{O}_{\varepsilon_0} F} d(x, B)$ достатньою є напівнеперервна згори щодо метрики Гаусдорфа залежність множини $\overline{O}_\varepsilon A$ від ε для кожної замкненої непорожньої $A \subset X$, тобто збіжність $d_H(\overline{O}_{\varepsilon'} A, \overline{O}_\varepsilon A) \to 0$ при $\varepsilon' \searrow \varepsilon$. Нагадаємо, що це виконано при компактності (X, d), але компактність не є необхідною — для внутрішності одиничної кулі в $\mathbb{R}^n$ дана властивість теж істинна. Тоді множина E_q замкнена щодо границь незростаючих послідовностей і непорожня, бо містить $\operatorname{diam} X$. Тому в E_q існує мінімальний елемент ε_q, який згідно зауваження 2.1 і є шуканою відстанню $\hat{d}(c, M_qX)$. Для цього ε_q, застосувавши теорему 2, легко побудувати найближчу до c (оптимальну) ємність $c_0 \in M_qX$, тобто таку, що $\hat{d}(c, c_0) = \varepsilon_q$ (наприклад, такими є $\overset{-q}{c}_\varepsilon$ та $\overset{+q}{c}_\varepsilon$ при $\varepsilon = \varepsilon_q$).

Розглянемо той випадок, коли множина E_q не обов'язково містить найменший елемента. Зрозуміло, що якщо $\varepsilon_q = \inf E_q$, то $\hat{d}(c, \overline{M}_qX) = \varepsilon_q$. Тоді всі $\varepsilon' > \varepsilon_q$ будуть належати до множини E_q, а це означає (згідно Теореми 2), що для довільного $\varepsilon' > \varepsilon_q$ існує ε'−близька до c ємність $c' \in \overline{M}_qX$, але ε_q−близької ємності із підпростору $\overline{M}_qX$ може й не існувати. Проте ємність $c_q \in \overline{M}_qX$, для якої $\hat{d}(c, c_q) = \varepsilon_q$, існує, про що стверджує наступна теорема.

Зауважимо, що при $\varepsilon' > \varepsilon > \varepsilon_q$ маємо

$$\overset{-q}{c}_{\varepsilon'} \leqslant \overset{-q}{c}_\varepsilon \leqslant \overset{+q}{c}_\varepsilon \leqslant \overset{+q}{c}_{\varepsilon'},$$

тому існують точні грані

$$\overset{-q}{c} = \sup_{\varepsilon > \varepsilon_q} \overset{-q}{c}_\varepsilon, \quad \overset{+q}{c} = \inf_{\varepsilon > \varepsilon_q} \overset{+q}{c}_\varepsilon,$$

які належать до $\overline{M}_q X$, причому $\overset{-q}{c}_\varepsilon \leqslant \overset{-q}{c} \leqslant \overset{+q}{c} \leqslant \overset{+q}{c}_\varepsilon$ для кожного $\varepsilon > \varepsilon_q$. Звідси випливає, що $\overset{-}{c}_q$ та $\overset{+}{c}_q$ є ε-близькими до c для всіх $\varepsilon > \varepsilon_q$, отже, відстань між кожною з них та c рівна ε_q.

Неважко записати явний вигляд оптимальних ємностей, отримавши наступне твердження.

Теорема 4. *Функції $\overset{-q}{c}$ та $\overset{+q}{c}$, визначені формулами*

$$\overset{-q}{c}(F) = \max\{\sup_{\substack{A \subset X \\ \mathrm{cl}}} \{c(A) - \varepsilon_q - q \cdot \lim_{\varepsilon \to \varepsilon_q + 0} \sup_{x \in \overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, F)\}, 0\}$$

та

$$\overset{+q}{c}(F) = \inf_{\substack{B \subset X \\ \mathrm{cl}}} \{\lim_{\varepsilon \to \varepsilon_q + 0} c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + \varepsilon_q + q \sup_{x \in F} d(x, B)\}$$

для замкненої $F \neq \varnothing$, і $\overset{-q}{c}(\varnothing) = \overset{+q}{c}(\varnothing) = 0$, є відповідно найбільшою і найменшою з ємностей з $\overline{M}_q X$, найближчих до ємності c.

References

[1] Choquet G. *Theory of Capacity*. Ann. Inst. Fourier 1953–1954, **5**, 131–295.

[2] Zarichnyi M.M., Nykyforchyn O.R. *Capacity functor in the category of compacta*. Sb. Math. 2008, **199** (2), 159–184. doi:10.1070/SM2008v199n02ABEH003914

[3] Nykyforchyn O.R., Repovš D. *Inclusion hyperspaces and capacities on Tyhonoff spaces: functors and monads*. Topology Appl. 2010, **157** (15), 2421–2434. doi:10.1016/j.topol.2010.07.032

[4] Cherkovsky T.M. *Metric spaces of regular capacities*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 166–176. (in Ukrainian) doi:10.15330/cmp.6.1.166-176.

Надійшло 17.10.2014

Hlushak I.D. *Approximation of capacities on metric spaces with Lipschitz capacities*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 196–202.

For arbitrary capacity on a space with a bounded metric, existence proved and explicit formulae obtained for closest capacities that are Lipschitz continuous with a given Lipschitz constant.

Key words and phrases: Hausdorff distance, capacity regular with respect to metric, Lipschitz capacity.

Глушак И.Д. *Приближение емкостей на метрических пространствах липшицевыми емкостями* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 196–202.

Для произвольной емкости на пространстве с ограниченной метрикой доказано существование получен явный вид ближайших к ней емкостей, липшицевых с данным коэффициентом.

Ключевые слова и фразы: расстояние Хаусдорфа, регулярная относительно метрики емкость, липшицева емкость.

ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, 6 (2), 203–211
doi:10.15330/cmp.6.2.203-211

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.203–211

Gurupadavva Ingalahalli, Bagewadi C.S.

ON φ-SYMMETRIC τ-CURVATURE TENSOR IN $N(k)$-CONTACT METRIC MANIFOLD

In this paper we study τ-curvature tensor in $N(k)$-contact metric manifold. We study τ-φ-recurrent, τ-φ-symmetric and globally τ-φ-symmetric $N(k)$-contact metric manifold.

Key words and phrases: contact metric manifold, symmetry.

Department of Mathematics, Kuvempu University, Shankaraghatta - 577 451, Shimoga, Karnataka, India
E-mail: gurupadavva@gmail.com (Gurupadavva Ingalahalli), prof_bagewadi@yahoo.co.in (Bagewadi C.S.)

Introduction

The notion of local symmetry of a Riemannian manifold has been weakened by many authors in several ways to a different extent. In the context of contact geometry the notion of φ-symmetry is introduced and studied by Boeckx E., Buecken P. and Vanhecke L. [3] with several examples. As a weaker version of local symmetry, Takahashi T. [13] introduced the notion of locally φ-symmetry on a Sasakian manifold. Generalizing the notion of φ-symmetry, the authors De U.C., Shaikh A.A. and Sudipta Biswas [4] introduced the notion of φ-recurrent Sasakian manifolds. This notion has been studied by many authors for different types of contact manifolds like Venkatesha and Bagewadi C.S. [14, 15], De U.C. and Abdul Kalam Gazi [5], Nagaraja H.G. [9] etc.

In [12] Tanno S. introduced the notion of k-nullitiy distribution of a contact metric manifold as a distribution such that the characteristic vector field ξ of the contact metric manifold belongs to the distribution. The contact metric manifold with ξ belonging to the k-nullity distribution is called $N(k)$-contact metric manifold such a manifold is also studied by various authors. Generalizing this notion in 1995, Blair D.E., Koufogiorgos T. and Papantoniou B.J. [2] introduced the notion of a contact metric manifold with ξ belonging to the (k, μ)-nullity distribution, where k and μ are real constants. In particular, if $\mu = 0$ then the notion of (k, μ)-nullity distribution reduces to the notion of k-nullity distribution.

In [6] Mukut Mani Tripathi and et.al. introduced the τ-curvature tensor which is a particular cases of known curvatures like conformal, concircular, projective, M-projective, W_i-curvature tensor$(i = 0, \ldots, 9)$ and W_j^*-curvature tensor$(j = 0, 1)$. Further, in [7,8] Mukut Mani Tripathi and et.al. studied τ-curvature tensor in K-contact, Sasakian and Semi-Riemannian manifolds. Later in [10] the authors studied some properties of τ-curvature tensor and they obtained some interesting results.

Motivated by all these work in this paper we studied the φ-symmetric τ-curvature tensor in $N(k)$-contact metric manifold.

УДК 514.7
2010 *Mathematics Subject Classification:* 53C15, 53C25, 53D15.

1 PRELIMINARIES

A $(2n+1)$-dimensional differential manifold M is said to have an almost contact structure (φ, ξ, η) if it carries a tensor field φ of type $(1,1)$, a vector field ξ and 1-form η satisfying

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \qquad \eta(\xi) = 1, \qquad \eta \circ \varphi = 0, \qquad \varphi\xi = 0. \tag{1}$$

Let g be a compatible Riemannian metric with almost contact structure (φ, ξ, η) such that,

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y),$$
$$g(\varphi X, Y) = -g(X, \varphi Y), \qquad g(X, \xi) = \eta(X). \tag{2}$$

where X, Y are vector fields defined on M. Then the structure (φ, ξ, η, g) on M is said to have an almost contact metric structure and the manifold M equipped with this structure is called an almost contact metric manifold [1]. An almost contact metric structure (φ, ξ, η, g) becomes a contact metric structure if for all vector fields X, Y on M we have $d\eta(X,Y) = g(X, \varphi Y)$.

Given a contact metric manifold $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, we define a $(1,1)$ tensor field h by $h = \frac{1}{2}L\varphi$, where L denotes the Lie differentiation. Then h is symmetric and satisfies $h\varphi = -\varphi h$. Also we have $Tr.h = Tr.\varphi h = 0$ and $h\xi = 0$. Moreover, if ∇ denotes the Riemannian connection on M, then the following relation holds

$$\nabla_X \xi = -\varphi X - \varphi h X. \tag{3}$$

For a contact metric manifold $M(\varphi, \xi, \eta, g)$ the (k, μ)-nullity distribution is

$$\begin{aligned} p \longrightarrow & N_p(k,\mu) \\ &= \{Z \in T_pM : R(X,Y)Z = k[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] + \mu[g(Y,Z)hX - g(X,Z)hY]\}, \end{aligned}$$

for all vector fields $X, Y \in T_pM$, where k, μ are real numbers and R is the curvature tensor. Hence if the characteristic vector field ξ belongs to the (k,μ)-nullity distribution, then we have

$$R(X,Y)\xi = k[\eta(Y)X - \eta(X)Y] + \mu[\eta(Y)hX - \eta(X)hY]. \tag{4}$$

Thus a contact metric manifold satisfying (4) is called a (k,μ)-contact metric manifold. In particular, if $\mu = 0$, then the notion of (k,μ)-nullity distribution reduces to the notion of k-nullity distribution introduced by Tanno S. [12]. In a (k,μ)-contact metric manifold [11] the following relations hold:

$$\begin{aligned}
h^2 &= (k-1)\varphi^2, \qquad k \le 1, \\
(\nabla_X \varphi)Y &= g(X + hX, Y)\xi - \eta(Y)[X + hX], \\
R(\xi, X)Y &= k[g(X,Y)\xi - \eta(Y)X] + \mu[g(hX,Y)\xi - \eta(Y)hX], \\
\eta(R(X,Y)Z) &= k[g(Y,Z)\eta(X) - g(X,Z)\eta(Y)] + \mu[g(hY,Z)\eta(X) - g(hX,Z)\eta(Y)], \\
S(X,\xi) &= 2nk\eta(X), \\
S(X,Y) &= [2(n-1) - n\mu]g(X,Y) + [2(n-1) + \mu]g(hX,Y) \\
&\quad + [2(1-n) + n(2k+\mu)]\eta(X)\eta(Y), \qquad n \ge 1, \\
r &= 2n[2n - 2 + k - n\mu], \\
S(\varphi X, \varphi Y) &= S(X,Y) - 2nk\eta(X)\eta(Y) - 2(2n - 2 + \mu)g(hX,Y),
\end{aligned}$$

where S is the Ricci tensor of type $(0,2)$, Q is the Ricci operator, that is, $S(X,Y) = g(QX,Y)$ and r is the scalar curvature of the manifold. From (2), it follows that

$$(\nabla_X \eta)Y = g(X + hX, \varphi Y).$$

The k-nullity distribution $N(k)$ of a Riemannian manifold M is defined by

$$p \longrightarrow N_p(k) = \{Z \in T_pM : R(X,Y)Z = k[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y]\},$$

k being a constant. If the characteristic vector field $\xi \in N(k)$, then we call a contact metric manifold an $N(k)$-contact metric manifold. In $N(k)$-contact metric manifold the following relations hold [5]:

$$\begin{aligned}
h^2 &= (k-1)\varphi^2, \qquad k \le 1, \\
(\nabla_X \varphi)Y &= g(X + hX, Y)\xi - \eta(Y)[X + hX], \\
R(\xi, X)Y &= k[g(X,Y)\xi - \eta(Y)X], \\
S(X,\xi) &= 2nk\eta(X), && (5) \\
S(X,Y) &= 2(n-1)g(X,Y) + 2(n-1)g(hX,Y) + [2(1-n) + 2nk]\eta(X)\eta(Y), \quad n \ge 1, && (6) \\
QX &= 2(n-1)X + 2(n-1)hX + [2(1-n) + 2nk]\eta(X)\xi, \qquad n \ge 1, && (7) \\
r &= 2n[2n - 2 + k], \\
S(\varphi X, \varphi Y) &= S(X,Y) - 2nk\eta(X)\eta(Y) - 4(n-1)g(hX,Y), && (8) \\
(\nabla_X \eta)Y &= g(X + hX, \varphi Y).
\end{aligned}$$

Definition 1. *An $N(k)$-contact metric manifold M is said to be locally φ-symmetric if*

$$\varphi^2((\nabla_W R)(X,Y)Z) = 0$$

for all vector fields X, Y, Z, W, which are orthogonal to ξ.

This notion was introduced by Takahashi T. [13] for Sasakian manifolds.

Definition 2. *An $N(k)$-contact metric manifold M is said to be φ-symmetric if*

$$\varphi^2((\nabla_W R)(X,Y)Z) = 0$$

for all arbitrary vector fields X, Y, Z, W.

Definition 3. *An $N(k)$-contact metric manifold M is said to be locally τ-φ-symmetric if*

$$\varphi^2((\nabla_W \tau)(X,Y)Z) = 0$$

for all vector fields X, Y, Z, W, which are orthogonal to ξ.

Definition 4. *An $N(k)$-contact metric manifold M is said to be φ-recurrent if and only if there exists a non zero 1- form A such that*

$$\varphi^2((\nabla_W R)(X,Y)Z) = A(W)R(X,Y)Z$$

for all vector fields X, Y, Z, W. Here X, Y, Z, W are arbitrary vector fields which are not necessarily orthogonal to ξ.

If the 1-form A vanishes identically, then the manifold is said to be a locally φ-symmetric manifold.

Definition 5. *An $N(k)$-contact metric manifold M is said to be τ-φ-recurrent if and only if there exists a non zero 1-form A such that*

$$\varphi^2((\nabla_W \tau)(X,Y)Z) = A(W)\tau(X,Y)Z,$$

for all vector fields X, Y, Z, W. Here X, Y, Z, W are arbitrary vector fields which are not necessarily orthogonal to ξ.

The τ-curvature tensor [7] is given by

$$\tau(X,Y)Z = a_0R(X,Y)Z + a_1S(Y,Z)X + a_2S(X,Z)Y + a_3S(X,Y)Z + a_4g(Y,Z)QX + a_5g(X,Z)QY + a_6g(X,Y)QZ + a_7[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y], \quad (9)$$

where $a_0,\dots,a_7$ are some smooth functions on M. For different values of $a_0,\dots,a_7$ the τ- curvature tensor reduces to the curvature tensor R, quasi-conformal curvature tensor, conformal curvature tensor, conharmonic curvature tensor, concircular curvature tensor, pseudo-projective curvature tensor, projective curvature tensor, M-projective curvature tensor, W_i-curvature tensors $(i = 0,\dots,9)$, W_j^*-curvature tensors $(j = 0,1)$.

2 τ-φ-RECURRENT $N(k)$-CONTACT METRIC MANIFOLD

In this section, we define τ-φ-recurrent $N(k)$-contact metric manifold by

$$\varphi^2((\nabla_W\tau)(X,Y)Z) = A(W)\tau(X,Y)Z$$

for all vector fields X,Y,Z,W. By virtue of (1), we have

$$-(\nabla_W\tau)(X,Y)Z + \eta((\nabla_W\tau)(X,Y)Z)\xi = A(W)\tau(X,Y)Z. \quad (10)$$

By taking an innerproduct with U, then we get

$$-g((\nabla_W\tau)(X,Y)Z,U) + \eta((\nabla_W\tau)(X,Y)Z)g(\xi,U) = A(W)g(\tau(X,Y)Z,U). \quad (11)$$

Let $\{e_i : i = 1,2,\dots,2n+1\}$ be an orthonormal basis of the tangent space at any point of the manifold. Putting $X = U = e_i$ in (11) and taking summation over i, $1 \le i \le 2n+1$, by virtue of (11), we obtain

$$\begin{aligned} &-[a_0 + (2n+1)a_1 + a_2 + a_3](\nabla_W S)(Y,Z) - [a_4 + 2na_7](\nabla_W r)g(Y,Z) \\ &- a_5g((\nabla_W Q)Y,Z) - a_6g((\nabla_W Q)Z,Y) + a_0\eta((\nabla_W R)(\xi,Y)Z) + a_1(\nabla_W S)(Y,Z) \\ &+ a_2(\nabla_W S)(\xi,Z)\eta(Y) + a_3(\nabla_W S)(Y,\xi)\eta(Z) + a_4g(Y,Z)\eta((\nabla_W Q)\xi) \\ &+ a_5\eta(Z)\eta((\nabla_W Q)Y) + a_6\eta(Y)\eta((\nabla_W Q)Z) + a_7(\nabla_W r)[g(Y,Z) - \eta(Y)\eta(Z)] \\ &= A(W)[[a_0 + (2n+1)a_1 + a_2 + a_3 + a_5 + a_6]S(Y,Z) + [a_4 + 2na_7]rg(Y,Z)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Putting $Z = \xi$ in (12) and simplifying, we get

$$\begin{aligned} &-[a_0 + 2na_1 + a_2 + a_3](\nabla_W S)(Y,\xi) - [a_4 + 2na_7](\nabla_W r)\eta(Y) \\ &- a_6g((\nabla_W Q)\xi,Y) + a_3(\nabla_W S)(Y,\xi) \\ &= A(W)\eta(Y)[[a_0 + (2n+1)a_1 + a_2 + a_3 + a_5 + a_6]2nk + [a_4 + 2na_7]r]. \end{aligned} \quad (13)$$

We know that

$$(\nabla_W S)(Y,\xi) = \nabla_W S(Y,\xi) - S(\nabla_W Y,\xi) - S(Y,\nabla_W\xi). \quad (14)$$

By using (3), (5) in (14), we have

$$(\nabla_W S)(Y,\xi) = S(Y,\varphi W) + S(Y,\varphi hW) - 2nkg(Y,\varphi W) - 2nkg(Y,\varphi hW). \quad (15)$$

Substituting (15) in (13), we obtain

$$\begin{aligned} &-[a_0 + 2na_1 + a_2 + a_6]\{S(Y,\varphi W) + S(Y,\varphi hW) - 2nkg(Y,\varphi W) - 2nkg(Y,\varphi hW)\} \\ &- [a_4 + 2na_7](\nabla_W r)\eta(Y) \\ &= [a_0 + (2n+1)a_1 + a_2 + a_3 + a_5 + a_6]2nkA(W)\eta(Y) + [a_4 + 2na_7]rA(W)\eta(Y). \end{aligned} \quad (16)$$

Replacing Y by φY in (16), we have

$$\begin{aligned} &-[a_0 + 2na_1 + a_2 + a_6]\{S(\varphi Y,\varphi W) + S(\varphi Y,\varphi hW) \\ &- 2nk[g(\varphi Y,\varphi W) + g(\varphi Y,\varphi hW)]\} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

If $[a_0 + 2na_1 + a_2 + a_6] \neq 0$, then by virtue of (1) and (8) in (17), we obtain

$$\begin{aligned} S(Y,W) = &[2nk - 2(n-1)(k-1)]g(Y,W) + 2(n-1)(k-1)\eta(Y)\eta(W) \\ &+ [2nk + 2(n-1)(k-1)]g(Y,hW) - [2nk + 2(n-1)(k-1)]\eta(Y)\eta(hW). \end{aligned} \quad (18)$$

Replacing in place W as hW in (18), we get

$$g(Y,hW) = n(k-1)g(Y,W) - n(k-1)\eta(Y)\eta(W). \quad (19)$$

By substituting (19) in (18), we get

$$\begin{aligned} S(Y,W) = &[2nk + 2(n-1)^2(k-1) + 2n^2k(k-1)]g(Y,W) \\ &+ [-2(n-1)^2(k-1) - 2n^2k(k-1)]\eta(Y)\eta(W). \end{aligned}$$

Hence we state the following

Theorem 1. *A τ-φ-recurrent $N(k)$-contact metric manifold is an η-Einstein manifold with* $-[a_0 + 2na_1 + a_2 + a_6] \neq 0$.

Now from (10), we have

$$(\nabla_W\tau)(X,Y)Z = \eta((\nabla_W\tau)(X,Y)Z)\xi - A(W)\tau(X,Y)Z, \quad (20)$$

from (20) and the second Bianchi identity, we get

$$\begin{aligned} &(\nabla_W\tau)(X,Y)Z + (\nabla_X\tau)(Y,W)Z + (\nabla_Y\tau)(W,X)Z \\ &= \eta((\nabla_W\tau)(X,Y)Z)\xi + \eta((\nabla_X\tau)(Y,W)Z)\xi + \eta((\nabla_Y\tau)(W,X)Z)\xi \\ &- \{A(W)\tau(X,Y)Z + A(X)\tau(Y,W)Z + A(Y)\tau(W,X)Z\}. \end{aligned} \quad (21)$$

From (21), we get

$$A(W)\eta(\tau(X,Y)Z) + A(X)\eta(\tau(Y,W)Z) + A(Y)\eta(\tau(W,X)Z) = 0. \quad (22)$$

By using (9) in (22), we obtain

$$\begin{aligned} &A(W)\{a_0k[g(Y,Z)\eta(X) - g(X,Z)\eta(Y)] + a_1\eta(X)[2(n-1)\{g(Y,Z) + g(hY,Z)\} \\ &+ [2(1-n) + 2nk]\eta(Y)\eta(Z)] + a_2\eta(Y)[2(n-1)g(X,Z) + 2(n-1)g(hX,Z) \\ &+ [2(1-n) + 2nk]\eta(X)\eta(Z)] + a_3\eta(Z)[2(n-1)g(X,Y) + 2(n-1)g(hX,Y) \\ &+ [2(1-n) + 2nk]\eta(X)\eta(Y)] + 2nka_4g(Y,Z)\eta(X) + 2nka_5g(X,Z)\eta(Y) \\ &+ 2nka_6g(X,Y)\eta(Z) + a_7[g(Y,Z)\eta(X) - g(X,Z)\eta(Y)]\} + A(X)\{a_0k[g(W,Z)\eta(Y) \\ &- g(Y,Z)\eta(W)] + a_1\eta(Y)[2(n-1)g(W,Z) + 2(n-1)g(hW,Z) \\ &+ [2(1-n) + 2nk]\eta(W)\eta(Z)] + a_2\eta(W)[2(n-1)g(Y,Z) + 2(n-1)g(hY,Z) \\ &+ [2(1-n) + 2nk]\eta(Y)\eta(Z)] + a_3\eta(Z)[2(n-1)g(Y,W) + 2(n-1)g(hY,W) \\ &+ [2(1-n) + 2nk]\eta(Y)\eta(W)] + 2nka_4g(W,Z)\eta(Y) + 2nka_5g(Y,Z)\eta(W) \\ &+ 2nka_6g(Y,W)\eta(Z) + a_7[g(W,Z)\eta(Y) - g(Y,Z)\eta(W)]\} + A(Y)\{a_0k[g(X,Z)\eta(W) \\ &- g(W,Z)\eta(X)] + a_1\eta(W)[2(n-1)g(X,Z) + 2(n-1)g(hX,Z) \\ &+ [2(1-n) + 2nk]\eta(X)\eta(Z)] + a_2\eta(X)[2(n-1)g(W,Z) + 2(n-1)g(hW,Z) \\ &+ [2(1-n) + 2nk]\eta(W)\eta(Z)] + a_3\eta(Z)[2(n-1)g(W,X) + 2(n-1)g(hW,X) \\ &+ [2(1-n) + 2nk]\eta(W)\eta(X)] + 2nka_4g(X,Z)\eta(W) + 2nka_5g(W,Z)\eta(X) \\ &+ 2nka_6g(W,X)\eta(Z) + a_7[g(X,Z)\eta(W) - g(W,Z)\eta(X)]\} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Putting $Y = Z = e_i$ in (23), we get

$$\begin{aligned} &A(W)\eta(X)[(2n-1)(a_0k+ra_7)+2na_1[2(n-1)+k]+[2nk+2(n-1)]a_2\\ &+2nk[a_3+(2n+1)a_4+2a_5+a_6]]+A(X)\eta(W)[-(2n-1)(a_0k+ra_7)\\ &+a_1[2(n-1)+k]+2na_2[k+2(n-1)]+2nk[a_3+2a_4+(2n+1)a_5+a_6]]\\ &+[a_1+a_2+a_3][2(1-n)+2nk]A(\xi)\eta(X)\eta(W)+2(n-1)a_1A(hX)\eta(W)\\ &+2(n-1)a_2A(hW)\eta(X)+[2(n-1)a_3+2nka_6]A(\xi)g(W,X)\\ &+2(n-1)a_3A(\xi)g(hW,X)=0. \end{aligned} \tag{24}$$

Putting $X = \xi$ in (24) and simplifying, we obtain

$$\begin{aligned} &A(W)[(2n-1)(a_0k+ra_7)+2na_1[2(n-1)+k]+a_2[2nk+2(n-1)]\\ &+2nk[a_3+(2n+1)a_4+2a_5+a_6]]+A(\xi)\eta(W)[-(2n-1)(a_0k+ra_7)\\ &+a_2[2(n-1)(2n-1)+4nk]+4nk[a_1+a_3+a_4+a_6]+2nk(2n+1)a_5]\\ &+2(n-1)a_2A(hW)=0. \end{aligned} \tag{25}$$

Replacing W by hW in (25), we obtain

$$A(hW) = \frac{2(n-1)a_2(k-1)}{L}[A(W)-A(\xi)\eta(W)], \tag{26}$$

where

$$\begin{aligned} L = (2n-1)(a_0k+ra_7)+2na_1[2(n-1)+k]+a_2[2nk+2(n-1)]\\ +2nk[a_3+(2n+1)a_4+2a_5+a_6]. \end{aligned}$$

Substituting (26) in (25), we get

$$A(W) = \frac{-[ML-E]}{L^2+E}A(\xi)\eta(W), \tag{27}$$

where

$$\begin{aligned} M &= -(2n-1)(a_0k+ra_7)+a_2[2(n-1)(2n-1)+4nk]\\ &\quad+2nk[2a_1+2a_3+2a_4+(2n+1)a_5+2a_6],\\ E &= 4(n-1)^2a_2^2(k-1). \end{aligned}$$

Here $A(\xi) = g(\xi,\rho)$, ρ being the vector field associated to the 1-form A, that is, $g(X,\rho) = A(X)$. Hence we state the following

Theorem 2. *In a τ-φ-recurrent $N(k)$-contact metric manifold the characteristic vector field ξ and the vector field ρ associated to the 1-form A are codirectional and the 1-form A is given in* (27).

3 τ-φ-SYMMETRIC $N(k)$-CONTACT METRIC MANIFOLD

In this section we define τ-φ-symmetric $N(k)$-contact metric manifold by

$$\varphi^2((\nabla_W\tau)(X,Y)Z) = 0$$

for all vector fields X, Y, Z, W, which are orthogonal to ξ. By using (6), (7) in (9), we get

$$\begin{aligned} \tau(X,Y)Z &= a_0R(X,Y)Z+a_1[2(n-1)g(Y,Z)X+[2(1-n)+2nk]\eta(Y)\eta(Z)X\\ &+2(n-1)g(hY,Z)X]+a_2[2(n-1)g(X,Z)Y+2(n-1)g(hX,Z)Y\\ &+[2(1-n)+2nk]\eta(X)\eta(Z)Y]+a_3[2(n-1)g(X,Y)Z+2(n-1)g(hX,Y)Z\\ &+[2(1-n)+2nk]\eta(X)\eta(Y)Z]+a_4g(Y,Z)[2(n-1)X+2(n-1)hX\\ &+[2(1-n)+2nk]\eta(X)\xi]+a_5g(X,Z)[2(n-1)Y+2(n-1)hY\\ &+[2(1-n)+2nk]\eta(Y)\xi]+a_6g(X,Y)[2(n-1)Z+2(n-1)hZ\\ &+[2(1-n)+2nk]\eta(Z)\xi]+a_7r[g(Y,Z)X-g(X,Z)Y]. \end{aligned} \tag{28}$$

Differentiating (28) with respect to W, we obtain

$$\begin{aligned} &(\nabla_W\tau)(X,Y)Z = a_0(\nabla_WR)(X,Y)Z+a_1[[2(1-n)+2nk]\{g(Y,\nabla_W\xi)\eta(Z)X\\ &+g(Z,\nabla_W\xi)\eta(Y)X\}+2(n-1)g((\nabla_Wh)Y,Z)X]+a_2[2(n-1)g((\nabla_Wh)X,Z)Y\\ &+[2(1-n)+2nk]\{g(X,\nabla_W\xi)\eta(Z)Y+g(Z,\nabla_W\xi)\eta(X)Y\}]\\ &+a_3[2(n-1)g((\nabla_Wh)X,Y)+[2(1-n)+2nk]\{g(X,\nabla_W\xi)\eta(Y)+g(Y,\nabla_W\xi)\eta(X)\}]Z\\ &+a_4g(Y,Z)[2(n-1)(\nabla_Wh)X+[2(1-n)+2nk]\{g(X,\nabla_W\xi)\xi+\eta(X)\nabla_W\xi\}]\\ &+a_5g(X,Z)[2(n-1)(\nabla_Wh)Y+[2(1-n)+2nk]\{g(Y,\nabla_W\xi)\xi+\eta(Y)\nabla_W\xi\}]\\ &+a_6g(X,Y)[2(n-1)(\nabla_Wh)Z+[2(1-n)+2nk]\{g(Z,\nabla_W\xi)\xi+\eta(Z)\nabla_W\xi\}]\\ &+a_7(\nabla_Wr)[g(Y,Z)X-g(X,Z)Y]. \end{aligned} \tag{29}$$

We assume that all vector fields X, Y, Z, W are orthogonal to ξ, then we have

$$\begin{aligned} &(\nabla_W\tau)(X,Y)Z = a_0(\nabla_WR)(X,Y)Z+a_4g(Y,Z)[2(n-1)\{(1-k)g(W,\varphi X)\\ &+g(W,h\varphi X)\}\xi+[2(1-n)+2nk]\{-g(X,\varphi W)-g(X,\varphi hW)\}\xi]\\ &+a_5g(X,Z)[2(n-1)\{(1-k)g(W,\varphi Y)+g(W,h\varphi Y)\}\xi+[2(1-n)+2nk]\{-g(Y,\varphi W)\\ &-g(Y,\varphi hW)\}\xi]+a_6g(X,Y)[2(n-1)\{(1-k)g(W,\varphi Z)+g(W,h\varphi Z)\}\xi\\ &+[2(1-n)+2nk]\{-g(Z,\varphi W)-g(Z,\varphi hW)\}\xi]+a_7(\nabla_Wr)[g(Y,Z)X-g(X,Z)Y]. \end{aligned}$$

Applying φ^2 on both sides of the above equation, we have

$$\varphi^2((\nabla_W\tau)(X,Y)Z) = a_0\varphi^2((\nabla_WR)(X,Y)Z)+a_7(\nabla_Wr)[g(Y,Z)\varphi^2X-g(X,Z)\varphi^2Y].$$

Hence we state the following

Theorem 3. *Let M be an $N(k)$-contact metric manifold. If any two of the following statements holds, then the remaining statement holds*

1) *M is locally τ-φ-symmetric,*
2) *M is locally φ-symmetric,*
3) *either $a_7 = 0$ or r is constant.*

4 GLOBALLY τ-φ-SYMMETRIC $N(k)$-CONTACT METRIC MANIFOLD

In this section, we define globally τ-φ-symmetric $N(k)$-contact metric manifold by

$$\varphi^2((\nabla_W\tau)(X,Y)Z) = 0 \tag{30}$$

for all vector fields X, Y, Z, W, which are arbitrary vector fields. By (1) and (30), we obtain

$$-((\nabla_W\tau)(X,Y)Z) + \eta((\nabla_W\tau)(X,Y)Z)\xi = 0. \tag{31}$$

By taking an innerproduct with U in (31), we have

$$-g(((\nabla_W\tau)(X,Y)Z),U) + \eta((\nabla_W\tau)(X,Y)Z)g(\xi,U) = 0. \tag{32}$$

Let $\{e_i : i = 1,2,\ldots,2n+1\}$ be an orthonormal basis of the tangent space at any point of the manifold. Putting $X = U = e_i$, in (32) and taking summation over i, $1 \leq i \leq 2n+1$, we get

$$-g(((\nabla_W\tau)(e_i,Y)Z),e_i) + \eta((\nabla_W\tau)(e_i,Y)Z)g(\xi,e_i) = 0. \tag{33}$$

By using (29) in (33) and simplifying, we get

$$\begin{aligned}
&-a_0(\nabla_W S)(Y,Z) - (2na_1 + a_2 + a_5)[2(n-1)\{(1-k)g(W,\varphi Y)\eta(Z) + g(W,h\varphi Y)\eta(Z)\\
&+\eta(Y)g(h(\varphi W + \varphi hW),Z)\} + [2(1-n)+2nk]\{-g(\varphi W,Y)\eta(Z) - g(Y,\varphi hW)\eta(Z)\\
&-\eta(Y)g(\varphi W,Z) - \eta(Y)g(\varphi hW,Z)\}] - (a_3+a_6)[2(n-1)\{-(1-k)g(\varphi W,Z)\eta(Y)\\
&-g(\varphi hW,Z)\eta(Y) + \eta(Z)g(h(\varphi W+\varphi hW),Y)\} + [2(1-n)+2nk]\{-g(\varphi W,Z)\eta(Y)\\
&-g(Z,\varphi hW)\eta(Y) - \eta(Z)g(\varphi W,Y) - \eta(Z)g(\varphi hW,Y)\}] - 2na_7(\nabla_W r)g(Y,Z)\\
&+a_0\eta((\nabla_W R)(\xi,Y)Z) + a_2[[2(1-n)+2nk]\{-g(\varphi W,Z)\eta(Y) - g(\varphi hW,Z)\eta(Y)\}\\
&+2(n-1)g(h(\varphi W+\varphi hW),Z)\eta(Y)] + a_3[2(n-1)g(h(\varphi W+\varphi hW),Y)\eta(Z)\\
&+[2(1-n)+2nk]\{-g(\varphi W,Y)\eta(Z) - g(\varphi hW,Y)\eta(Z)\}]\\
&+a_5\eta(Z)[2(n-1)\{(1-k)g(W,\varphi Y) + g(W,h\varphi Y)\} + [2(1-n)+2nk]\{-g(\varphi W,Y)\\
&-g(Y,\varphi hW)\}] + a_6\eta(Y)[[2(1-n)+2nk]\{-g(\varphi W,Z) - g(Z,\varphi hW)\}\\
&+2(n-1)\{(1-k)g(W,\varphi Z) + g(W,h\varphi Z)\}] + (\nabla_W r)a_7[g(Y,Z) - \eta(Y)\eta(Z)] = 0.
\end{aligned} \tag{34}$$

Putting $Z = \xi$ and using the condition

$$(\nabla_W S)(Y,\xi) = S(Y,\varphi W) + S(Y,\varphi hW) - 2nkg(Y,\varphi W) - 2nkg(Y,\varphi hW),$$

in (34) we obtain

$$\begin{aligned}
&-a_0 S(Y,W) + [[2nk - 2(n-1)(k-1)]a_0 + [2na_1 + a_2 + a_6][2(1-n)+2nk]\\
&+2(n-1)(1-k)[2na_1+a_2]]g(Y,W) + [2(n-1)(k-1)[a_0 + 2na_1 + a_2]\\
&-[2na_1+a_2+a_6][2(1-n)+2nk]]\eta(Y)\eta(W) + [[2nk + 2(n-1)]a_0\\
&+[2na_1+a_2+a_6][2(1-n)+2nk] + 2(n-1)[2na_1+a_2]]g(Y,hW)\\
&-2(n-1)a_6[(k-1)[g(Y,W) - \eta(Y)\eta(W)] - g(hW,Y)] = 0.
\end{aligned} \tag{35}$$

Replacing W by hW in (35), we obtain

$$g(Y,hW) = \frac{E}{F}[g(Y,W) - \eta(Y)\eta(W)], \tag{36}$$

where, $E = [[2nk - 2(n-1)]a_0 + [2na_1 + a_2 + a_6][2(1-n) + 2nk] + 2(n-1)(a_0 + 2na_1 + a_2 + a_6)](k-1)$ and $F = [[2nk - 2(n-1)]a_0 - 2(n-1)(k-1)(a_0 + 2na_1 + a_2 + a_6) + [2na_1 + a_2 + a_6][2(1-n) + 2nk]]$. By substituting (36) in (35), we obtain

$$S(Y,W) = \alpha g(Y,W) + \beta\eta(Y)\eta(W),$$

where $\alpha = [\frac{N}{a_0} + \frac{LE}{a_0 F}]$ and $\beta = [\frac{P}{a_0} - \frac{LE}{a_0 F}]$,
$N = [[2nk - 2(n-1)(k-1)]a_0 + [2na_1 + a_2 + a_6][2(1-n) + 2nk] + 2(n-1)(1-k)[2na_1 + a_2]]$,
$L = [[2nk + 2(n-1)]a_0 + [2na_1 + a_2 + a_6][2(1-n) + 2nk] + 2(n-1)[2na_1 + a_2 + a_6]]$,
$P = [2(n-1)(k-1)(a_0 + 2na_1 + a_2) - [2na_1 + a_2 + a_6][2(1-n) + 2nk]]$.

Theorem 4. *A globally τ-φ-symmetric $N(k)$-contact metric manifold is an η-Einstein manifold with $a_0 \neq 0$.*

REFERENCES

[1] Blair D.E. Contact manifolds in Riemannian geometry. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New-York, 1976.

[2] Blair D.E., Koufogiorgos T., Papantoniou B.J. *Contact metric manifolds satisfying a nullity condition*. Israel J. Math. 1995, **91**, 189–214.

[3] Boeckx E., Buecken P., Vanhecke L. *φ-symmetric contact metric spaces*. Glasg. Math. J. 1999, **41** (3), 409–416.

[4] De U.C., Shaikh A.A., Biswas S. *On φ-recurrent Sasakian manifolds*. Novi Sad J. Math. 2003, **33**, 43–48.

[5] De U.C., Abdul Kalam Gazi. *On φ-recurrent $N(k)$-contact metric manifolds*. Math. J. Okayama Univ. 2008, **50**, 101–112.

[6] Mukut Mani Tripathi, Punam Gupta. *τ-curvature tensor on a semi-Riemannian manifold*. J. Adv. Math. Stud. 2011, **4** (1), 117–129.

[7] Mukut Mani Tripathi, Punam Gupta. *On τ-curvature tensor in K-contact and Sasakian manifolds*. Int. Electron. J. Geom. 2011, **4**, 32–47.

[8] Mukut Mani Tripathi, Punam Gupta. *On $(N(k),\xi)$-semi-Riemannian manifolds: Semisymmetries*. arXiv: 1202.6138 [math.DG].

[9] Nagaraja H.G. *φ-Recurrent trans-Sasakian manifolds*. Mat. Vesnik. 2011, **63** (2), 79–86.

[10] Nagaraja H.G., Somashekhara G. *τ-curvature tensor in (k,μ)-contact manifolds*. Proc. Est. Acad. Sci. 2012, **61** (1), 20–28.

[11] Shaikh A.A., Kanak Kanti Baishya. *On (k,μ)-contact metric manifolds*. Differ. Geom. Dyn. Syst. 2006, **8**, 253–261.

[12] Tanno S. *Ricci curvatures of contact Riemannian manifolds*. Tohoku Math. J. 1988, **40**, 441–448.

[13] Takahashi T. *Sasakian φ-symmetric spaces*. Tohoku Math. J. 1977, **29**, 91–113.

[14] Venkatesha, Bagewadi C.S. *On Pseudo-projective φ-recurrent Kenmotsu manifolds*. Soochow J. Math. 2006, **32** (3), 1–7.

[15] Venkatesha, Bagewadi C.S. *On concircular φ-recurrent LP-Sasakian manifolds*. Differ. Geom. Dyn. Syst. 2008, **10**, 312–319.

Received 02.12.2013

Ґурупадавва Інґалахаллі, Баґеваді Ц.С. *Про φ-симетричний тензор τ-кривини в $N(k)$-контактному метричному многовиді* // Карпатські матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — C. 203–211.

В цій статті вивчається тензор τ-кривини в $N(k)$-контактному метричному многовиді. Досліджується τ-φ-рекурентний, τ-φ-симетричний і глобально τ-φ-симетричний $N(k)$-контактний метричний многовид.

Ключові слова і фрази: контактний метричний многовид, симетрія.

Гурупадавва Ингалахалли, Багевади Ц.С. *О φ-симметрическом тензоре τ-кривизны в $N(k)$-контактном метрическом многообразии* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — C. 203–211.

В этой статье изучается тензор τ-кривизны в $N(k)$-контактном метрическом многообразии. Исследуется τ-φ-рекуррентное, τ-φ-симметрическое и глобально τ-φ-симметрическое $N(k)$-контактное метрическое многообразие.

Ключевые слова и фразы: контактное метрическое многообразие, симметрия.

ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 212–229
doi:10.15330/cmp.6.2.212-229

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.212–229

DYRIV M.M.[1], KACHANOVSKY N.A.[2]

ON OPERATORS OF STOCHASTIC DIFFERENTIATION ON SPACES OF REGULAR TEST AND GENERALIZED FUNCTIONS OF LÉVY WHITE NOISE ANALYSIS

The operators of stochastic differentiation, which are closely related with the extended Skorohod stochastic integral and with the Hida stochastic derivative, play an important role in the classical (Gaussian) white noise analysis. In particular, these operators can be used in order to study properties of the extended stochastic integral and of solutions of stochastic equations with Wick-type nonlinearities.

In this paper we introduce and study bounded and unbounded operators of stochastic differentiation in the Lévy white noise analysis. More exactly, we consider these operators on spaces from parametrized regular rigging of the space of square integrable with respect to the measure of a Lévy white noise functions, using the Lytvynov's generalization of the chaotic representation property. This gives a possibility to extend to the Lévy white noise analysis and to deepen the corresponding results of the classical white noise analysis.

Key words and phrases: operator of stochastic differentiation, stochastic derivative, extended stochastic integral, Lévy process.

[1] Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, 57 Shevchenka str., 76018, Ivano-Frankivsk, Ukraine
[2] Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, 3 Tereschenkivska str., 01601, Kyiv, Ukraine
E-mail: `nick2@zeos.net` (Kachanovsky N.A.)

INTRODUCTION

Let $L=(L_t)_{t\in[0,+\infty)}$ be a Lévy process, i.e., a random process on $[0,+\infty)$ with stationary independent increments and such that $L_0=0$ (see, e.g., [4, 25, 26] for detailed information about Lévy processes). In particular cases, when L is a Wiener or Poisson process, any square integrable random variable can be decomposed in a series of repeated stochastic integrals from nonrandom functions with respect to L. This property of L is called the *chaotic representation property* (CRP), see, e.g., [23] for detailed information. The CRP plays a very important role in the stochastic analysis (in particular, it can be used in order to construct extended stochastic integrals [14, 29, 13], stochastic derivatives and operators of stochastic differentiation, e.g., [32, 1]), but, unfortunately, for a general Lévy process this property does not hold (e.g., [31]).

There are different generalizations of the CRP for Lévy processes: one can use the Itô's approach [12], the Nualart-Schoutens' approach [24, 27], the Lytvynov's approach [22], the Oksendal's approach [6, 5] etc. The interconnection between these generalizations of the CRP is described in, e.g., [22, 2, 6, 30, 5, 21].

Let from now L be a Lévy process without Gaussian part and drift (it is comparatively simply to consider such processes from technical point of view). In the paper [21] the extended

УДК 517.98
2010 *Mathematics Subject Classification:* 60H05, 60G51, 60H40, 46F05, 46F25.

Skorohod stochastic integral with respect to L and the corresponding Hida stochastic derivative, in terms of the Lytvynov's generalization of the CRP, on the space of square integrable random variables (L^2) were constructed; some properties of these operators were established; and it was shown that the extended stochastic integrals constructed with use of the above-mentioned generalizations of the CRP coincide. In the papers [19, 8] the stochastic integral and derivative were extended to spaces of test and generalized functions from riggings of (L^2), this gives a possibility to extend an area of their possible applications (in particular, now it is possible to define the stochastic integral and derivative as linear *continuous* operators). But together with the mentioned operators, it is natural to introduce and to study *operators of stochastic differentiation* in the Lévy white noise analysis, by analogy with the Gaussian analysis [32, 1], the Gamma-analysis [15, 16], and the Meixner analysis [17, 18]. These operators are closely related with the extended Skorohod stochastic integral with respect to a Lévy process and with the corresponding Hida stochastic derivative and, by analogy with the "classical case", can be used, in particular, in order to study properties of the extended stochastic integral and properties of solutions of normally ordered stochastic equations (stochastic equations with Wick-type nonlinearities in another terminology). So, the aims of the present paper are to introduce the operators of stochastic differentiation on spaces of the so-called regular parametrized rigging of (L^2) (e.g., [19, 8, 7]) and to study some properties of these operators. In the next papers we'll consider elements of the so-called Wick calculus in the Lévy white noise analysis, this will give us the possibility to continue the study of properties and applications of the mentioned operators. Note that some results of the present paper were announced without detailed proofs in the short paper [7].

The paper is organized in the following manner. In the first section we introduce a Lévy process L and construct a convenient for our considerations probability triplet connected with L; then, following [21, 19], we describe in details the Lytvynov's generalization of the CRP, the extended stochastic integral with respect to L, and the corresponding Hida stochastic derivative, on the spaces of the regular parametrized rigging of (L^2). In the second section we deal with the operators of stochastic differentiation.

1 PRELIMINARIES

1.1 Lévy processes

Denote $\mathbb{R}_+ := [0,+\infty)$. In this paper we deal with a real-valued locally square integrable Lévy process $L=(L_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (a random process on $\mathbb{R}_+$ with stationary independent increments and such that $L_0=0$) without Gaussian part and drift. As is well known (e.g., [6]), the characteristic function of L is

$$\mathbb{E}[e^{i\theta L_t}] = \exp\Big[t\int_{\mathbb{R}}(e^{i\theta x}-1-i\theta x)\nu(dx)\Big], \tag{1}$$

where ν is the Lévy measure of L, which is a measure on $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, here and below $\mathcal{B}$ denotes the Borel σ-algebra, $\mathbb{E}$ denotes the expectation. We assume that *ν is a Radon measure whose support contains an infinite number of points, $\nu(\{0\})=0$, there exists $\varepsilon>0$ such that*

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{\varepsilon|x|}\nu(dx)<\infty,$$

and

$$\int_{\mathbb{R}} x^2\nu(dx)=1. \tag{2}$$

Let us define a measure of the white noise of L. Let $\mathcal{D}$ denote the set of all real-valued infinite-differentiable functions on $\mathbb{R}_+$ with compact supports. As is well known, $\mathcal{D}$ can be endowed by the projective limit topology generated by a family of Sobolev spaces (e.g., [3]). Let $\mathcal{D}'$ be the set of linear continuous functionals on $\mathcal{D}$. For $\omega \in \mathcal{D}'$ and $\varphi \in \mathcal{D}$ denote $\omega(\varphi)$ by $\langle \omega, \varphi \rangle$; note that one can understand $\langle \cdot, \cdot \rangle$ as the dual pairing generated by the scalar product in the space $L^2(\mathbb{R}_+)$ of (classes of) square integrable with respect to the Lebesgue measure real-valued functions on $\mathbb{R}_+$. The notation $\langle \cdot, \cdot \rangle$ will be preserved for dual pairings in tensor powers of spaces.

Definition 1. *A probability measure μ on $(\mathcal{D}', \mathcal{C}(\mathcal{D}'))$, where $\mathcal{C}$ denotes the cylindrical σ-algebra, with the Fourier transform*

$$\int_{\mathcal{D}'} e^{i\langle \omega, \varphi \rangle} \mu(d\omega) = \exp\Big[\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} (e^{i\varphi(u)x} - 1 - i\varphi(u)x) du\nu(dx) \Big], \quad \varphi \in \mathcal{D}, \tag{3}$$

is called the measure of a Lévy white noise.

The existence of μ from the Bochner–Minlos theorem (e.g., [11]) follows. Below we will reckon that the *σ-algebra $\mathcal{C}(\mathcal{D}')$ is complete with respect to μ*, i.e., $\mathcal{C}(\mathcal{D}')$ contains all subsets of all measurable sets O such that $\mu(O) = 0$.

Denote $(L^2) := L^2(\mathcal{D}', \mathcal{C}(\mathcal{D}'), \mu)$ the space of (classes of) real-valued square integrable with respect to μ functions on $\mathcal{D}'$; let also $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}_+)$. Substituting in (3) $\varphi = t\psi$, $t \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathcal{D}$, and using the Taylor decomposition by t and (2), one can show that

$$\int_{\mathcal{D}'} \langle \omega, \psi \rangle^2 \mu(d\omega) = \int_{\mathbb{R}_+} (\psi(u))^2 du \tag{4}$$

(this statement follows also from results of [22] and [6]). Let $f \in \mathcal{H}$ and $\mathcal{D} \ni \varphi_k \to f$ in $\mathcal{H}$ as $k \to \infty$. It follows from (4) that $\{\langle \circ, \varphi_k \rangle\}_{k \geq 1}$ is a Cauchy sequence in (L^2), therefore one can define $\langle \circ, f \rangle := (L^2) - \lim_{k\to\infty} \langle \circ, \varphi_k \rangle$. It is easy to show (by the method of "mixed sequences") that $\langle \circ, f \rangle$ does not depend on a choice of an approximating sequence for f and therefore is well defined in (L^2).

Let us consider $\langle \circ, 1_{[0,t)} \rangle \in (L^2)$, $t \in \mathbb{R}_+$ (here and below 1_A denotes the indicator of a set A). It follows from (1) and (3) that $\big(\langle \circ, 1_{[0,t)} \rangle\big)_{t \in \mathbb{R}_+}$ can be identified with a Lévy process on the probability space $(\mathcal{D}', \mathcal{C}(\mathcal{D}'), \mu)$, i.e., one can write $L_t = \langle \circ, 1_{[0,t)} \rangle \in (L^2)$.

Remark 1. *Note that one can understand the Lévy white noise as a generalized random process (in the sense of [9]) with trajectories from $\mathcal{D}'$: formally $L_t'(\omega) = \langle \omega, 1_{[0,t)} \rangle' = \langle \omega, \delta_t \rangle = \omega(t)$, where δ_t is the Dirac delta-function concentrated at t. Therefore μ is the measure of L' in the classical sense of this notion [10].*

1.2 Lytvynov's generalization of the CRP

Denote by $\widehat{\otimes}$ a symmetric tensor product and set $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Let $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}(\mathcal{D}')$ be the set of continuous polynomials on $\mathcal{D}'$, i.e., $\mathcal{P}$ consists of zero and elements of the form

$$f(\omega) = \sum_{n=0}^{N_f} \langle \omega^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle, \quad \omega \in \mathcal{D}', \ N_f \in \mathbb{Z}_+, \ f^{(n)} \in \mathcal{D}^{\widehat{\otimes} n}, \ f^{(N_f)} \neq 0,$$

here N_f is called the *power of a polynomial f*; $\langle \omega^{\otimes 0}, f^{(0)} \rangle := f^{(0)} \in \mathcal{D}^{\widehat{\otimes} 0} := \mathbb{R}$. Since the measure μ of a Lévy white noise has a holomorphic at zero Laplace transform (this follows from (3) and properties of the measure ν, see also [22]), $\mathcal{P}$ is a dense set in (L^2) [28]. Denote by $\mathcal{P}_n$ the set of continuous polynomials of power $\leq n$, by $\overline{\mathcal{P}}_n$ the closure of $\mathcal{P}_n$ in (L^2). Let for $n \in \mathbb{N}$ $\mathbf{P}_n := \overline{\mathcal{P}}_n \ominus \overline{\mathcal{P}}_{n-1}$ (the orthogonal difference in (L^2)), $\mathbf{P}_0 := \overline{\mathcal{P}}_0$. It is clear that

$$(L^2) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_n.$$

Let $f^{(n)} \in \mathcal{D}^{\widehat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Denote by $:\!\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle\!:$ the orthogonal projection of a monomial $\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle$ onto $\mathbf{P}_n$. Let us define scalar products $(\cdot,\cdot)_{ext}$ on $\mathcal{D}^{\widehat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, by setting for $f^{(n)}, g^{(n)} \in \mathcal{D}^{\widehat{\otimes} n}$

$$(f^{(n)}, g^{(n)})_{ext} := \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{D}'} :\!\langle \omega^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle\!::\!\langle \omega^{\otimes n}, g^{(n)} \rangle\!: \mu(d\omega),$$

and let $|\cdot|_{ext}$ be the corresponding norms, i.e., $|f^{(n)}|_{ext} = \sqrt{(f^{(n)}, f^{(n)})_{ext}}$. Denote by $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, the completions of $\mathcal{D}^{\widehat{\otimes} n}$ with respect to the norms $|\cdot|_{ext}$. For $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ define a Wick monomial $:\!\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle\!: \stackrel{\text{def}}{=} (L^2) - \lim_{k\to\infty} :\!\langle \circ^{\otimes n}, f_k^{(n)} \rangle\!:$, where $\mathcal{D}^{\widehat{\otimes} n} \ni f_k^{(n)} \to F^{(n)}$ as $k \to \infty$ in $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ (well-posedness of this definition can be proved by the method of "mixed sequences"). Since, as is easy to see, for each $n \in \mathbb{Z}_+$ the set $\{:\!\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle\!: | f^{(n)} \in \mathcal{D}^{\widehat{\otimes} n}\}$ is a dense one in $\mathbf{P}_n$, $F \in (L^2)$ if and only if there exists a unique sequence of kernels $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, such that

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} :\!\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle\!: \tag{5}$$

and

$$\|F\|^2_{(L^2)} = \int_{\mathcal{D}'} |F(\omega)|^2 \mu(d\omega) = \mathbb{E}|F|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |F^{(n)}|^2_{ext} < \infty.$$

So, for $F, G \in (L^2)$ the scalar product has the form

$$(F, G)_{(L^2)} = \int_{\mathcal{D}'} F(\omega) G(\omega) \mu(d\omega) = \mathbb{E}[FG] = \sum_{n=0}^{\infty} n! (F^{(n)}, G^{(n)})_{ext},$$

where $F^{(n)}, G^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ are the kernels from decompositions (5) for F and G respectively. In particular, for $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ and $G^{(m)} \in \mathcal{H}^{(m)}_{ext}$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{aligned}(:\!\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle\!:, :\!\langle \circ^{\otimes m}, G^{(m)} \rangle\!:)_{(L^2)} &= \int_{\mathcal{D}'} :\!\langle \omega^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle\!::\!\langle \omega^{\otimes m}, G^{(m)} \rangle\!: \mu(d\omega) \\ &= \mathbb{E}\big[:\!\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle\!::\!\langle \circ^{\otimes m}, G^{(m)} \rangle\!:\big] = \delta_{n,m} n! (F^{(n)}, G^{(n)})_{ext}.\end{aligned}$$

Also we note that in the space (L^2) $:\!\langle \circ^{\otimes 0}, F^{(0)} \rangle\!: = \langle \circ^{\otimes 0}, F^{(0)} \rangle = F^{(0)}$ and $:\!\langle \circ, F^{(1)} \rangle\!: = \langle \circ, F^{(1)} \rangle$ [22].

In order to work with spaces $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$, it is necessary to know the explicit formulas for the scalar products $(\cdot,\cdot)_{ext}$. Let us write out these formulas. Denote by $\|\cdot\|_\nu$ the norm in the space $L^2(\mathbb{R}, \nu)$ of (classes of) square integrable with respect to ν real-valued functions on $\mathbb{R}$. Let

$$p_n(x) := x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{n,1}x, \quad a_{n,j} \in \mathbb{R}, \ j \in \{1, \ldots, n-1\}, \ n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

be orthogonal in $L^2(\mathbb{R}, \nu)$ polynomials, i.e., for natural numbers n, m such that $n \neq m$,

$\int_{\mathbb{R}} p_n(x)p_m(x)\nu(dx) = 0$. Then for $F^{(n)}, G^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$, $n \in \mathbb{N}$, we have [22]

$$\begin{aligned}(F^{(n)},G^{(n)})_{ext} = &\sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\ l_1>l_2>\dots>l_k,\\ l_1s_1+\dots+l_ks_k=n}} \frac{n!}{s_1!\cdots s_k!}\Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1}\cdots\Big(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\Big)^{2s_k}\\ &\times \int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k}} F^{(n)}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1},\dots,u_{s_1}}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1+\dots+s_k},\dots,u_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k})\\ &\times G^{(n)}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1},\dots,u_{s_1}}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1+\dots+s_k},\dots,u_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k})du_1\cdots du_{s_1+\dots+s_k}.\end{aligned} \tag{7}$$

In particular, for $n = 1$ $(F^{(1)}, G^{(1)})_{ext} = \|p_1\|^2_\nu\langle F^{(1)}, G^{(1)}\rangle$; if $n = 2$ then $(F^{(2)}, G^{(2)})_{ext} = \|p_1\|^4_\nu\langle F^{(2)}, G^{(2)}\rangle + \frac{\|p_2\|^2_\nu}{2}\int_{\mathbb{R}_+} f^{(2)}(u,u)g^{(2)}(u,u)du$, etc.

It follows from (7) that $\mathcal{H}^{(1)}_{ext} = \mathcal{H} \equiv L^2(\mathbb{R}_+)$: by (6) $p_1(x) = x$ and therefore by (2) $\|p_1\|_\nu = 1$; and for $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ one can identify $\mathcal{H}^{\hat{\otimes}n}$ with the proper subspace of $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ that consists of "vanishing on diagonals" elements (i.e., $F^{(n)}(u_1,\dots,u_n) = 0$ if there exist $k, j \in \{1,\dots,n\}$ such that $k \neq j$ but $u_k = u_j$). In this sense the *space* $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ *is an extension of* $\mathcal{H}^{\hat{\otimes}n}$ (this explains why we use the subscript *ext* in the designations $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$, $(\cdot,\cdot)_{ext}$ and $|\cdot|_{ext}$).

1.3 A regular rigging of (L^2)

Denote $\mathcal{P}_W := \{f = \sum_{n=0}^{N_f} :\langle\circ^{\otimes n}, f^{(n)}\rangle:, f^{(n)} \in \mathcal{D}^{\hat{\otimes}n}, N_f \in \mathbb{Z}_+\} \subset (L^2)$. Accept on default $\beta \in [0,1]$, $q \in \mathbb{Z}$ in the case $\beta \in (0,1]$ and $q \in \mathbb{Z}_+$ if $\beta = 0$. Define scalar products $(\cdot,\cdot)_{q,\beta}$ on $\mathcal{P}_W$ by setting for

$$f = \sum_{n=0}^{N_f} :\langle\circ^{\otimes n}, f^{(n)}\rangle:,\ g = \sum_{n=0}^{N_g} :\langle\circ^{\otimes n}, g^{(n)}\rangle: \in \mathcal{P}_W$$

$$(f,g)_{q,\beta} := \sum_{n=0}^{\min(N_f,N_g)} (n!)^{1+\beta}2^{qn}(f^{(n)}, g^{(n)})_{ext}.$$

Let $\|\cdot\|_{q,\beta}$ be the corresponding norms, i.e., $\|f\|_{q,\beta} = \sqrt{(f,f)_{q,\beta}}$.

Definition 2. *We define parametrized Kondratiev-type spaces of test functions* $(L^2)^\beta_q$ *as completions of* $\mathcal{P}_W$ *with respect to the norms* $\|\cdot\|_{q,\beta}$*; and set* $(L^2)^\beta := \mathrm{pr}\lim_{q\to+\infty}(L^2)^\beta_q$ *(the projective limit of spaces).*

As is easy to see, $F \in (L^2)^\beta_q$ if and only if F can be presented in form (5) with $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ and

$$\|F\|^2_{q,\beta} := \|F\|^2_{(L^2)^\beta_q} = \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{1+\beta}2^{qn}|F^{(n)}|^2_{ext} < \infty. \tag{8}$$

For $F, G \in (L^2)^\beta_q$ the scalar product has a form $(F,G)_{(L^2)^\beta_q} = \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{1+\beta}2^{qn}(F^{(n)}, G^{(n)})_{ext}$, where $F^{(n)}, G^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ are the kernels from decompositions (5) for F and G correspondingly. Further, $F \in (L^2)^\beta$ if and only if F can be presented in form (5) and norm (8) is finite for each $q \in \mathbb{Z}_+$.

Proposition 1 ([19]). *For any* $\beta \in (0,1]$ *and* $q \in \mathbb{Z}$ *(in the same way as for* $\beta = 0$ *and any* $q \in \mathbb{Z}_+$*) the space* $(L^2)^\beta_q$ *is densely and continuously embedded into* (L^2).

In view of this proposition, one can consider a chain

$$(L^2)^{-\beta} \supset (L^2)^{-\beta}_{-q} \supset (L^2) \supset (L^2)^\beta_q \supset (L^2)^\beta, \tag{9}$$

where $(L^2)^{-\beta}_{-q}$, $(L^2)^{-\beta} = \mathrm{ind}\lim_{q\to+\infty}(L^2)^{-\beta}_{-q}$ (the inductive limit of spaces) are the spaces dual of $(L^2)^\beta_q$, $(L^2)^\beta$ correspondingly with respect to (L^2).

Definition 3. *The spaces* $(L^2)^{-\beta}_{-q}$*,* $(L^2)^{-\beta}$ *are called parametrized Kondratiev-type spaces of regular generalized functions.*

The next statement from the definition of the spaces $(L^2)^{-\beta}_{-q}$ and the general duality theory follows.

Proposition 2. *1) Any regular generalized function* $F \in (L^2)^{-\beta}_{-q}$ *can be presented as formal series* (5) *(with coefficients* $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$*) that converges in* $(L^2)^{-\beta}_{-q}$*, i.e.,*

$$\|F\|^2_{-q,-\beta} := \|F\|^2_{(L^2)^{-\beta}_{-q}} = \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{1-\beta}2^{-qn}|F^{(n)}|^2_{ext} < \infty, \tag{10}$$

and, vice versa, any formal series (5) *with finite norm* (10) *is a regular generalized function from* $(L^2)^{-\beta}_{-q}$*;*

2) for $F, G \in (L^2)^{-\beta}_{-q}$ *the scalar product has a form*

$$(F,G)_{(L^2)^{-\beta}_{-q}} = \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{1-\beta}2^{-qn}(F^{(n)}, G^{(n)})_{ext},$$

where $F^{(n)}, G^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ *are the kernels from decompositions* (5) *for* F *and* G *respectively;*

3) the dual pairing between $F \in (L^2)^{-\beta}_{-q}$ *and* $f \in (L^2)^\beta_q$ *that is generated by the scalar product in* (L^2)*, has a form*

$$\langle\!\langle F, f\rangle\!\rangle_{(L^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} n!(F^{(n)}, f^{(n)})_{ext}, \tag{11}$$

where $F^{(n)}, f^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ *are the kernels from decompositions* (5) *for* F *and* f *respectively;*

4) $F \in (L^2)^{-\beta}$ *if and only if* F *can be presented in form* (5) *and norm* (10) *is finite for some* $q \in \mathbb{Z}_+$.

Remark 2. *We use the term "regular generalized functions" for elements of* $(L^2)^{-\beta}_{-q}$ *and of* $(L^2)^{-\beta}$ *because the kernels from decompositions* (5) *of these elements and the kernels from decompositions* (5) *of test functions belong to the same spaces.*

In what follows, it will be convenient to denote the spaces $(L^2)^\beta_q$, $(L^2) = (L^2)^0_0$, $(L^2)^{-\beta}_{-q}$ from chain (9) by $(L^2)^\beta_q$, $\beta \in [-1,1]$, $q \in \mathbb{Z}$ (we accept this on default). The norms in these spaces are given, obviously, by formula (8).

1.4 Stochastic integrals and derivatives

Let $F \in (L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}$. It follows from representation (5) for elements of $(L^2)^\beta_q$ that F can be presented in the form

$$F(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} :\langle\circ^{\otimes n}, F^{(n)}_\cdot\rangle:,\quad F^{(n)}_\cdot \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext} \otimes \mathcal{H}. \tag{12}$$

Let us describe the construction of an extended stochastic integral that is based on this decomposition and correlated with the structure of the spaces $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ (a detailed presentation is given in [21, 19]; in the case when L is a process of Meixner type (e.g., [22]), such an integral is constructed and studied in [20]).

Let $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$. We select a representative (a function) $\dot{f}^{(n)} \in F^{(n)}$ such that

$$\dot{f}_u^{(n)}(u_1, \dots, u_n) = 0 \text{ if for some k} \in \{1, \dots, \text{n}\}\ u = u_k. \tag{13}$$

Accept on default $t_1, t_2 \in [0, +\infty]$, $t_1 < t_2$. Let $\widehat{f}_{[t_1,t_2)}^{(n)}$ be the symmetrization of a function $\dot{f}^{(n)} 1_{[t_1,t_2)}(\cdot)$ by $n+1$ variables. Define $\widehat{F}_{[t_1,t_2)}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$ as the equivalence class in $\mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$ generated by $\widehat{f}_{[t_1,t_2)}^{(n)}$ (i.e., $\widehat{f}_{[t_1,t_2)}^{(n)} \in \widehat{F}_{[t_1,t_2)}^{(n)}$).

Lemma 1 ([19, 21]). *For each $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$, the element $\widehat{F}_{[t_1,t_2)}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$ is well defined (in particular, $\widehat{F}_{[t_1,t_2)}^{(n)}$ does not depend on a choice of a representative $\dot{f}^{(n)} \in F^{(n)}$ satisfying* (13)*) and*

$$|\widehat{F}_{[t_1,t_2)}^{(n)}|_{ext} \leq |F^{(n)} 1_{[t_1,t_2)}(\cdot)|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}} \leq |F^{(n)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}}. \tag{14}$$

Definition 4. *We define the extended stochastic integral*

$$\int_{t_1}^{t_2} \circ(u) \widehat{d} L_u : (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H} \to (L^2)_{q-1}^\beta \tag{15}$$

by the formula

$$\int_{t_1}^{t_2} F(u) \widehat{d} L_u := \sum_{n=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n+1}, \widehat{F}_{[t_1,t_2)}^{(n)} \rangle :, \tag{16}$$

where $\widehat{F}_{[t_1,t_2)}^{(0)} := F^{(0)} 1_{[t_1,t_2)}(\cdot) \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_{ext}^{(1)}$, and $\widehat{F}_{[t_1,t_2)}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$, are constructed by the kernels $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}$ from decomposition (12) *for F.*

As it is shown in [19, 8], this integral is a linear *continuous* operator. Moreover, if F is integrable by Itô (i.e., $F \in (L^2) \otimes \mathcal{H}$ and is adapted with respect to the flow of σ-algebras generated by the Lévy process L) then F is integrable in the extended sense and $\int_{t_1}^{t_2} F(u) \widehat{d} L_u = \int_{t_1}^{t_2} F(u) dL_u \in (L^2)$, where $\int_{t_1}^{t_2} F(u) dL_u$ is the Itô stochastic integral [21] (this explains why the integral $\int_{t_1}^{t_2} \circ(u) \widehat{d} L_u$ is called the *extended* one).

Sometimes it can be convenient to define the extended stochastic integral by formula (16) as a linear operator

$$\int_{t_1}^{t_2} \circ(u) \widehat{d} L_u : (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H} \to (L^2)_q^\beta. \tag{17}$$

If $\beta = -1$ then this operator is continuous [19], for $\beta \in (-1, 1]$ this is not the case. But if we accept the set

$$\Big\{ F \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H} : \Big\| \int_{t_1}^{t_2} F(u) \widehat{d} L_u \Big\|_{q,\beta}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)!)^{1+\beta} 2^{q(n+1)} |\widehat{F}_{[t_1,t_2)}^{(n)}|_{ext}^2 < \infty \Big\}$$

as the domain of integral (17) then the last will be a *closed* operator [19, 8]. Also we note that the extended stochastic integral can be defined by formula (16) as a linear continuous operator acting from $(L^2)^\beta \otimes \mathcal{H} := \operatorname{pr} \lim_{q \to +\infty} (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}$ to $(L^2)^\beta$, or from $(L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H} := \operatorname{ind} \lim_{q \to +\infty} (L^2)_{-q}^{-\beta} \otimes \mathcal{H}$ to $(L^2)^{-\beta}$, here $\beta \in [0, 1]$.

At last, we recall briefly the notion of a Hida stochastic derivative in the Lévy white noise analysis in terms of the Lytvynov's CRP ([21, 19, 8]).

Definition 5. *We define a Hida stochastic derivative $1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\partial. : (L^2)_{1-q}^{-\beta} \to (L^2)_{-q}^{-\beta} \otimes \mathcal{H}$ as a linear continuous operator adjoint to extended stochastic integral* (15)*, i.e., for all $F \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}$ and $G \in (L^2)_{1-q}^{-\beta}$*

$$\langle\!\langle F(\cdot), 1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\partial. G \rangle\!\rangle_{(L^2)\otimes\mathcal{H}} = \langle\!\langle \int_{t_1}^{t_2} F(u) \widehat{d} L_u, G \rangle\!\rangle_{(L^2)},$$

here $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_{(L^2)\otimes\mathcal{H}}$ denotes the dual pairing generated by the scalar product in $(L^2) \otimes \mathcal{H}$.

If instead of integral (15) one uses integral (17), the corresponding Hida stochastic derivative will be a linear unbounded (except the case $\beta = -1$), but closed operator acting from $(L^2)_{-q}^{-\beta}$ to $(L^2)_{-q}^{-\beta} \otimes \mathcal{H}$ [8]. It is clear also that the Hida stochastic derivative can be defined as a linear continuous operator acting from $(L^2)^\beta$ to $(L^2)^\beta \otimes \mathcal{H}$ ($\beta \in [-1, 1]$) that is adjoint to the corresponding extended stochastic integral.

In order to write out an explicit formula for the Hida stochastic derivative in terms of decompositions by the Wick monomials, we need some preparation. Let $G^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, $\dot{g}^{(n)} \in G^{(n)}$ be a representative of $G^{(n)}$. We consider $\dot{g}^{(n)}(\cdot)$, i.e., separate one argument of $\dot{g}^{(n)}$, and define $G^{(n)}(\cdot) \in \mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}$ as the equivalence class in $\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}$ generated by $\dot{g}^{(n)}(\cdot)$ (i.e., $\dot{g}^{(n)}(\cdot) \in G^{(n)}(\cdot)$).

Lemma 2 ([21]). *For each $G^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, the element $G^{(n)}(\cdot) \in \mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}$ is well defined (in particular, $G^{(n)}(\cdot)$ does not depend on a choice of a representative $\dot{g}^{(n)} \in G^{(n)}$) and*

$$|G^{(n)}(\cdot)|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}} \leq |G^{(n)}|_{ext}. \tag{18}$$

Note that, in spite of estimate (18), the space $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, can not be considered as a subspace of $\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}$ because different elements of $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ can coincide as elements of $\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}$.

The next statement easily follows from results of [21, 19, 8].

Proposition 3. *For a test or square integrable or generalized function G of form* (5)

$$1_{[t_1,t_2)}(\cdot)\partial. G = \sum_{n=1}^{\infty} n :\langle \circ^{\otimes n-1}, G^{(n)}(\cdot) 1_{[t_1,t_2)}(\cdot) \rangle : \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) :\langle \circ^{\otimes n}, G^{(n+1)}(\cdot) 1_{[t_1,t_2)}(\cdot) \rangle :.$$

Finally, we note that the extended stochastic integral and the Hida stochastic derivative are mutually adjoint operators [21, 19, 8].

2 Operators of stochastic differentiation

2.1 The case of bounded operators

In order to define operators of stochastic differentiation on spaces $(L^2)_q^\beta$, we need some preparation. Let $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Consider a function $H : \mathbb{R}_+^{n+m} \to \mathbb{R}$. Denote

$$\begin{aligned} &\widetilde{H}(u_1, \dots, u_n; u_{n+1}, \dots, u_{n+m}) \\ &\quad := \begin{cases} H(u_1, \dots, u_{n+m}), & \text{if for all } i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{n+1, \dots, n+m\}\ u_i \neq u_j, \\ 0, & \text{in other cases.} \end{cases} \end{aligned}$$

Let $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $G^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$. We select representatives (functions) $\dot{f}^{(n)} \in F^{(n)}$, $\dot{g}^{(m)} \in G^{(m)}$ from the equivalence classes $F^{(n)}$, $G^{(m)}$, and set $\widetilde{f^{(n)}g^{(m)}} := \dot{f}^{(n)} \cdot \dot{g}^{(m)}$. Let $\widehat{f^{(n)}g^{(m)}}$ be the symmetrization of $\widetilde{f^{(n)}g^{(m)}}$ by all variables, $F^{(n)} \diamond G^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+m)}$ be the equivalence class in $\mathcal{H}_{ext}^{(n+m)}$ that is generated by $\widehat{f^{(n)}g^{(m)}}$ (i.e., $\widehat{f^{(n)}g^{(m)}} \in F^{(n)} \diamond G^{(m)}$). The next statement in a sense is a generalization of Lemma 1.

Lemma 3. *The element $F^{(n)} \diamond G^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+m)}$ is well defined (in particular, $F^{(n)} \diamond G^{(m)}$ does not depend on a choice of representatives from $F^{(n)}$ and $G^{(m)}$) and*

$$|F^{(n)} \diamond G^{(m)}|_{ext} \le |F^{(n)}|_{ext} |G^{(m)}|_{ext}. \tag{19}$$

Remark 3. *Not strictly speaking, $F^{(n)} \diamond G^{(m)}$ is the symmetrization of a function*

$$\begin{cases} F^{(n)}(u_1,\dots,u_n)G^{(m)}(u_{n+1},\dots,u_{n+m}), & \text{if } \forall i \in \{1,\dots,n\}, j \in \{n+1,\dots,n+m\}\, u_i \neq u_j, \\ 0, & \text{in other cases} \end{cases}$$

by all arguments.

Proof. For $n = 0$ or $m = 0$ the statement of the lemma is, obviously, true. Let $n, m \in \mathbb{N}$, $\dot{f}^{(n)} \in F^{(n)}$, $\dot{g}^{(m)} \in G^{(m)}$. It is clear that

$$\widehat{f^{(n)}g^{(m)}}(u_1,\dots,u_{n+m}) = \frac{1}{(n+m)!} \sum_{\pi \in S_{n+m}} \widetilde{f^{(n)}g^{(m)}}(u_{\pi(1)},\dots,u_{\pi(n+m)}), \tag{20}$$

where S_{n+m} is a family of all permutations of numbers $1,\dots,n+m$. Without loss of generality we can think that $\dot{f}^{(n)}$, $\dot{g}^{(m)}$ are symmetric functions and $m \ge n$. For each collection of arguments $u_{\pi(1)},\dots,u_{\pi(n)}$ we consider all summands from sum (20) with such a collection (it is clear that there are $m!$ such summands). Taking into consideration the symmetric property of $\dot{g}^{(m)}$, one can conclude that all these summands are equal inter se, therefore one can replace the mentioned summands by a representative multiplied by $m!$. After it one can use by analogy the symmetric property of $\dot{f}^{(n)}$ and rewrite equality (20) in the form

$$\begin{aligned} &\widehat{f^{(n)}g^{(m)}}(u_1,\dots,u_{n+m}) \\ &= \frac{n!m!}{(n+m)!} \sum_{\substack{1 \le p_1,\dots,p_n \le n,\, n+1 \le q_1,\dots,q_m \le n+m,\, 0 \le r \le n \\ p_1 < \dots < p_r,\, p_{r+1} < \dots < p_n,\, q_1 < \dots < q_{n-r},\, q_{n-r+1} < \dots < q_m}} \widetilde{f^{(n)}g^{(m)}}(u_{p_1},\dots,u_{p_r},u_{q_1},\dots,u_{q_{n-r}}; \\ &\qquad u_{p_{r+1}},\dots,u_{p_n},u_{q_{n-r+1}},\dots,u_{q_m}) \end{aligned} \tag{21}$$

(here for $r = n$ the argument in the right hand side of (21) is $(u_1,\dots,u_n; u_{n+1},\dots,u_{n+m})$; for $r = 0$ this argument is $(u_{q_1},\dots,u_{q_n}; u_1,\dots,u_n,u_{q_{n+1}},\dots,u_{q_m})$). To put it in another way, the arguments of $\widetilde{f^{(n)}g^{(m)}}$ in sum (21) are u_j, $j \in \{1,\dots,n+m\}$, where the indexes of n first and m last arguments (before and after ';') are (independently) ordered in ascending. (Note that we selected arrangement in ascending when we used the symmetric property of $\dot{f}^{(n)}$ and $\dot{g}^{(m)}$ because this is convenient for a consequent calculation.)

Let us estimate $|\widehat{f^{(n)}g^{(m)}}|_{ext}$. Substituting (21) in the expression for $|\cdot|_{ext}$ (see (7)) we obtain

$$\begin{aligned} |\widehat{f^{(n)}g^{(m)}}|_{ext}^2 &= \sum_{\substack{k,l_j,s_j \in \mathbb{N}: j=1,\dots,k,\, l_1 > l_2 > \dots > l_k, \\ l_1 s_1 + \dots + l_k s_k = n+m}} \frac{(n+m)!}{s_1! \dots s_k!} \left(\frac{\|p_{l_1}\|_v}{l_1!}\right)^{2s_1} \dots \left(\frac{\|p_{l_k}\|_v}{l_k!}\right)^{2s_k} \\ &\times \int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k}} |\widehat{f^{(n)}g^{(m)}}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1+\dots+s_k},\dots,u_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k})|^2 du_1 \dots du_{s_1+\dots+s_k} \\ &\le \sum_{\substack{k,l_j,s_j \in \mathbb{N}: j=1,\dots,k,\, l_1 > l_2 > \dots > l_k, \\ l_1 s_1 + \dots + l_k s_k = n+m}} \frac{(n+m)!}{s_1! \dots s_k!} \left(\frac{\|p_{l_1}\|_v}{l_1!}\right)^{2s_1} \dots \left(\frac{\|p_{l_k}\|_v}{l_k!}\right)^{2s_k} \left(\frac{n!m!}{(n+m)!}\right)^2 \frac{(n+m)!}{n!m!} \\ &\times \left[\int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k}} |\widetilde{f^{(n)}g^{(m)}}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1+\dots+s_k},\dots,u_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k})|^2 du_1 \dots du_{s_1+\dots+s_k} + \cdots \right] \\ &= \sum_{\substack{k,l_j,s_j \in \mathbb{N}: j=1,\dots,k,\, l_1 > l_2 > \dots > l_k, \\ l_1 s_1 + \dots + l_k s_k = n+m}} \frac{n!m!}{s_1! \dots s_k!} \left(\frac{\|p_{l_1}\|_v}{l_1!}\right)^{2s_1} \dots \left(\frac{\|p_{l_k}\|_v}{l_k!}\right)^{2s_k} \\ &\times \left[\int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k}} |\widetilde{f^{(n)}g^{(m)}}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1+\dots+s_k},\dots,u_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k})|^2 du_1 \dots du_{s_1+\dots+s_k} + \cdots \right] \end{aligned} \tag{22}$$

(here we used the inequality $|\sum_{l=1}^p a_l|^2 \le p \sum_{l=1}^p |a_l|^2$ and the fact that the sum in the right hand side of (21) contains $\frac{(n+m)!}{n!m!}$ summands). We say that a collection of equal inter se arguments (e.g., $(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1})$) is called a *procession*. It follows from the ordering in ascending of indexes in (21) and in the statement for $|\cdot|_{ext}$ (see (22)) that in summands in interior sums $[\cdots]$ from (22) processions can "tear" only so that different parts of a "torn" procession will be for different parties from ';'; processions being for one side from ';' do not switch places; and elements in processions do not switch places. Further, it follows from a construction of $\widetilde{f^{(n)}g^{(m)}}$ that summands in interior sums $[\cdots]$ from (22), in which a procession is divided by ';', are equal to zero. Another summands (if there exist for a collection k, l_j, s_j) disintegrate on groups of equal inter se integrals. These groups arise by means of transpositions of processions with equal quantity of members, which are placed before ';' and after ';'. It is clear that if there are s' processions of length l before ';' and s'' processions of length l after ';' then by means of mutual transpositions of these processions one can obtain $\frac{(s'+s'')!}{s'!s''!}$ equal inter se summands.

So, nonzero summands in the last sum from (22) are "connected" with the expressions

$$l_1 s_1 + \dots + l_k s_k = n+m \tag{23}$$

that can be presented in the form

$$\begin{aligned} &l'_1 s'_1 + \dots + l'_{k'} s'_{k'} = n,\ l''_1 s''_1 + \dots + l''_{k''} s''_{k''} = m, \\ &k', k'', l'_1, \dots, l'_{k'}, s'_1, \dots, s'_{k'}, l''_1, \dots, l''_{k''}, s''_1, \dots, s''_{k''} \in \mathbb{N}, \\ &l'_1 > \dots > l'_{k'},\ l''_1 > \dots > l''_{k''} \end{aligned} \tag{24}$$

(the first sum in (24) corresponds to first n arguments of $\widetilde{f^{(n)}g^{(m)}}$, the second one corresponds to last m arguments). Now for each s_j from (23) either there exists $s'_i = s_j$ ($l'_i = l_j$) or there exists

$s''_i = s_j$ ($l''_i = l_j$) or there exist s'_i and s''_w such that $s'_i + s''_w = s_j$ ($l'_i = l''_w = l_j$). Inequalities for l', l'' in (24) follow from inequalities $l_1 > \cdots > l_k$ and ordering of indexes in (21) (more long processions have smaller indexes of arguments).

We will replace each group of equal inter se summands in the last expression from (22) by a representative multiplied by a quantity of summands in the group. Now, taking into account that $w^{s'+s''} = w^{s'}w^{s''}$, one can rewrite the last expression from (22) in the form

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{k',k'',l'_1,\dots,l'_{k'},s'_1,\dots,s'_{k'},l''_1,\dots,l''_{k''},s''_1,\dots,s''_{k''}\in\mathbb{N},\\ l'_1>\dots>l'_{k'},\ l''_1>\dots>l''_{k''},\\ l'_1s'_1+\dots+l'_{k'}s'_{k'}=n,\ l''_1s''_1+\dots+l''_{k''}s''_{k''}=m}} \frac{n!m!}{s'_1!\dots s'_{k'}!s''_1!\dots s''_{k''}!}\\
&\times\left(\frac{\|p_{l'_1}\|_\nu}{l'_1!}\right)^{2s'_1}\cdots\left(\frac{\|p_{l'_{k'}}\|_\nu}{l'_{k'}!}\right)^{2s'_{k'}}\left(\frac{\|p_{l''_1}\|_\nu}{l''_1!}\right)^{2s''_1}\cdots\left(\frac{\|p_{l''_{k''}}\|_\nu}{l''_{k''}!}\right)^{2s''_{k''}}\\
&\times\int_{\mathbb{R}_+^{s'_1+\dots+s'_{k'}+s''_1+\dots+s''_{k''}}}|\widetilde{f^{(n)}g^{(m)}}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l'_1},\dots,\underbrace{u_{s'_1+\dots+s'_{k'}},\dots,u_{s'_1+\dots+s'_{k'}}}_{l'_{k'}};\\
&\underbrace{u_{n+1},\dots,u_{n+1}}_{l''_1},\dots,\underbrace{u_{n+s''_1+\dots+s''_{k''}},\dots,u_{n+s''_1+\dots+s''_{k''}}}_{l''_{k''}})|^2\\
&\times du_1\dots du_{s'_1+\dots+s'_{k'}}du_{n+1}\dots du_{n+s''_1+\dots+s''_{k''}}.
\end{aligned}\tag{25}$$

Since the Lebesgue measure is a non-atomic one, we can replace $\widetilde{f^{(n)}g^{(m)}}$ in this expression by $\dot f^{(n)}\dot g^{(m)}$, therefore (25) is equal to $|\dot f^{(n)}|^2_{ext}|\dot g^{(m)}|^2_{ext}$, whence

$$|\widetilde{f^{(n)}g^{(m)}}|_{ext} \le |\dot f^{(n)}|_{ext}|\dot g^{(m)}|_{ext}. \tag{26}$$

It follows from this inequality that $\widetilde{f^{(n)}g^{(m)}}$ generates an element $F^{(n)}\diamond G^{(m)}$ of $\mathcal{H}_{ext}^{(n+m)}$ and estimate (19) is fulfilled.

Let $\dot f_1^{(n)} \in F^{(n)}$ and $\dot g_1^{(m)} \in G^{(m)}$ be another representatives of $F^{(n)}$ and $G^{(m)}$, $F_1^{(n)}\diamond G_1^{(m)}$ be the corresponding element of $\mathcal{H}_{ext}^{(n+m)}$. Using obvious properties of the operation $\widehat{\diamond}$ and estimate (26) we obtain

$$\begin{aligned}|F^{(n)}\diamond G^{(m)} - F_1^{(n)}\diamond G_1^{(m)}|_{ext} &= |\widetilde{f^{(n)}g^{(m)}} - \widetilde{f_1^{(n)}g_1^{(m)}}|_{ext}\\
&\le |\widetilde{f^{(n)}g^{(m)}} - \widetilde{f^{(n)}g_1^{(m)}}|_{ext} + |\widetilde{f^{(n)}g_1^{(m)}} - \widetilde{f_1^{(n)}g_1^{(m)}}|_{ext}\\
&= |\widetilde{f^{(n)}(g^{(m)} - g_1^{(m)})}|_{ext} + |\widetilde{(f^{(n)} - f_1^{(n)})g_1^{(m)}}|_{ext}\\
&\le |\dot f^{(n)}|_{ext}|\dot g^{(m)} - \dot g_1^{(m)}|_{ext} + |\dot f^{(n)} - \dot f_1^{(n)}|_{ext}|\dot g_1^{(m)}|_{ext} = 0,\end{aligned}$$

therefore $F^{(n)}\diamond G^{(m)}$ does not depend on a choice of representatives from $F^{(n)}$ and $G^{(m)}$. □

Let $F^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$, $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $m > n$. We define a "product" $(F^{(m)}, f^{(n)})_{ext} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m-n)}$ by setting for each $g^{(m-n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m-n)}$

$$((F^{(m)}, f^{(n)})_{ext}, g^{(m-n)})_{ext} = (F^{(m)}, g^{(m-n)}\diamond f^{(n)})_{ext}. \tag{27}$$

Since (see (19))

$$|(F^{(m)}, g^{(m-n)}\diamond f^{(n)})_{ext}| \le |F^{(m)}|_{ext}|g^{(m-n)}\diamond f^{(n)}|_{ext} \le |F^{(m)}|_{ext}|g^{(m-n)}|_{ext}|f^{(n)}|_{ext},$$

this definition is correct and

$$|(F^{(m)}, f^{(n)})_{ext}|_{ext} \le |F^{(m)}|_{ext}|f^{(n)}|_{ext}. \tag{28}$$

Definition 6. *Let $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$. We define an operator of stochastic differentiation*

$$(D^n\circ)(f^{(n)}) : (L^2)_q^\beta \to (L^2)_{q-1}^\beta \tag{29}$$

by setting

$$\begin{aligned}(D^nF)(f^{(n)}) &:= \sum_{m=n}^\infty \frac{m!}{(m-n)!} :\langle\circ^{\otimes m-n}, (F^{(m)}, f^{(n)})_{ext}\rangle:\\
&\equiv \sum_{m=0}^\infty \frac{(m+n)!}{m!} :\langle\circ^{\otimes m}, (F^{(m+n)}, f^{(n)})_{ext}\rangle:,\end{aligned}\tag{30}$$

where $F^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$ are the kernels from decomposition (5) for F. Also we denote $D := D^1$.

Since (see (8), (28))

$$\begin{aligned}\|(D^nF)(f^{(n)})\|^2_{q-1,\beta} &= \sum_{m=0}^\infty (m!)^{1+\beta}2^{(q-1)m}\Big(\frac{(m+n)!}{m!}\Big)^2|(F^{(m+n)}, f^{(n)})_{ext}|^2_{ext}\\
&= 2^{-qn}\sum_{m=0}^\infty ((m+n)!)^{1+\beta}2^{q(m+n)}\Big[2^{-m}\Big(\frac{(m+n)!}{m!}\Big)^{1-\beta}\Big]|(F^{(m+n)}, f^{(n)})_{ext}|^2_{ext}\\
&\le 2^{-qn}|f^{(n)}|^2_{ext}c\sum_{m=0}^\infty ((m+n)!)^{1+\beta}2^{q(m+n)}|F^{(m+n)}|^2_{ext} \le 2^{-qn}|f^{(n)}|^2_{ext}c\|F\|^2_{q,\beta},\end{aligned}\tag{31}$$

where $c = \max_{m\in\mathbb{Z}_+}\Big[2^{-m}\Big(\frac{(m+n)!}{m!}\Big)^{1-\beta}\Big]$, this definition is correct and operator (29) is a linear continuous one. Moreover, for each $F \in (L^2)_q^\beta$ one can understand $(D^nF)(\circ)$ as a linear continuous operator acting from $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ to $(L^2)_{q-1}^\beta$.

Remark 4. *As is easily seen, for each $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, $(D^n\circ)(f^{(n)})$ can be defined by formula* (30) *as a linear continuous operator on $(L^2)^\beta$, $\beta \in [-1, 1]$. In the case $\beta = 1$ formula* (30) *defines a linear continuous operator $(D^n\circ)(f^{(n)})$ on $(L^2)_q^1$, $q \in \mathbb{Z}$, this can be proved by analogy with calculation* (31).

Let us consider main properties of the operators D^n.

Theorem 1. *1) For $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$, $f_j^{(k_j)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(k_j)}$, $j \in \{1, \dots, m\}$,*

$$(D^{k_m}(\cdots(D^{k_2}((D^{k_1}\circ)(f_1^{(k_1)})))(f_2^{(k_2)})\cdots))(f_m^{(k_m)}) = (D^{k_1+\dots+k_m}\circ)(f_1^{(k_1)}\diamond\cdots\diamond f_m^{(k_m)}).$$

2) For each $F \in (L^2)_q^\beta$ the kernels $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, from decomposition (5) *can be presented in the form*

$$F^{(n)} = \frac{1}{n!}\mathbb{E}(D^nF),$$

i.e., for each $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ $(F^{(n)}, f^{(n)})_{ext} = \frac{1}{n!}\mathbb{E}((D^nF)(f^{(n)}))$, here $\mathbb{E}\circ := \langle\!\langle\circ, 1\rangle\!\rangle_{(L^2)}$ is a generalized expectation.

3) The adjoint to D^n operator has the form

$$(D^nG)(f^{(n)})^* = \sum_{m=0}^\infty :\langle\circ^{m+n}, G^{(m)}\diamond f^{(n)}\rangle:\in (L^2)_{-q}^{-\beta}, \tag{32}$$

where $G \in (L^2)_{1-q}^{-\beta}$, $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $G^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$ are the kernels from decomposition (5) for G.

Proof. 1) The proof consists in the application of the mathematical induction method.

2) Using (30) and (11), for each $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ we obtain

$$\mathbb{E}((D^nF)(f^{(n)})) = \langle\langle (D^nF)(f^{(n)}), 1\rangle\rangle_{(L^2)} = n!(F^{(n)}, f^{(n)})_{ext}.$$

3) Let $F \in (L^2)_q^\beta$, $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $G \in (L^2)_{1-q}^{-\beta}$. Using (30), (5), (11) and (27), we obtain

$$\langle\langle (D^nF)(f^{(n)}), G\rangle\rangle_{(L^2)} = \langle\langle \sum_{m=0}^\infty \frac{(m+n)!}{m!} :\langle \circ^{\otimes m}, (F^{(m+n)}, f^{(n)})_{ext}\rangle:, \sum_{k=0}^\infty :\langle \circ^{\otimes k}, G^{(k)}\rangle: \rangle\rangle_{(L^2)}$$
$$= \sum_{m=0}^\infty (m+n)!((F^{(m+n)}, f^{(n)})_{ext}, G^{(m)})_{ext} = \sum_{m=0}^\infty (m+n)!(F^{(m+n)}, G^{(m)} \diamond f^{(n)})_{ext}$$
$$= \langle\langle \sum_{k=0}^\infty :\langle \circ^{\otimes k}, F^{(k)}\rangle:, \sum_{m=0}^\infty :\langle \circ^{\otimes m+n}, G^{(m)} \diamond f^{(n)}\rangle: \rangle\rangle_{(L^2)} = \langle\langle F, (D^nG)(f^{(n)})^*\rangle\rangle_{(L^2)},$$

whence the result follows. □

Now we consider in more detail the case $n = 1$. Denote $\partial_\cdot := 1_{[0,+\infty)}(\cdot)\partial_\cdot$ (see Subsection 1.4).

Theorem 2. *1) For all $G \in (L^2)_{1-q}^{-\beta}$ and $f^{(1)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(1)} = \mathcal{H}$*

$$(DG)(f^{(1)})^* = \int_{\mathbb{R}_+} G \cdot f^{(1)}(u)\widehat{d}L_u \in (L^2)_{-q}^{-\beta}. \tag{33}$$

2) For all $F \in (L^2)_q^\beta$ and $f^{(1)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(1)}$

$$(DF)(f^{(1)}) = \int_{\mathbb{R}_+} \partial_u F \cdot f^{(1)}(u)du \in (L^2)_{q-1}^\beta, \tag{34}$$

here the integral in the right hand side is a Pettis one (the weak integral).

3) Let $F \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}$. Then for all $t_1, t_2 \in [0,+\infty]$, $t_1 < t_2$, and $f^{(1)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(1)} = \mathcal{H}$

$$(D\int_{t_1}^{t_2} F(u)\widehat{d}L_u)(f^{(1)}) = \int_{t_1}^{t_2} (DF(u))(f^{(1)})\widehat{d}L_u + \int_{t_1}^{t_2} F(u)f^{(1)}(u)du \in (L^2)_{q-1}^\beta, \tag{35}$$

here the last integral is a Pettis one.

Proof. 1) The result follows from representation (32) with $n = 1$: it is necessary to compare the construction of kernels of the extended stochastic integral (see Subsection 1.4) with the construction of a product $\diamond$.

2) Taking into account (33) and the definition of $\partial_\cdot$ (see Subsection 1.4), for all $G \in (L^2)_{1-q}^{-\beta}$ we obtain

$$\langle\langle (DF)(f^{(1)}), G\rangle\rangle_{(L^2)} = \langle\langle F, \int_{\mathbb{R}_+} G \cdot f^{(1)}(u)\widehat{d}L_u\rangle\rangle_{(L^2)}$$
$$= \langle\langle \partial_\cdot F, G \otimes f^{(1)}(\cdot)\rangle\rangle_{(L^2)\otimes\mathcal{H}} = \langle\langle \int_{\mathbb{R}_+} \partial_u F \cdot f^{(1)}(u)du, G\rangle\rangle_{(L^2)},$$

whence the result follows.

3) Using (16) and (30), we obtain

$$(D\int_{t_1}^{t_2} F(u)\widehat{d}L_u)(f^{(1)}) = \sum_{m=0}^\infty (m+1) :\langle \circ^{\otimes m}, (\widehat{F}_{[t_1,t_2)}^{(m)}, f^{(1)})_{ext}\rangle:, \tag{36}$$

where $\widehat{F}_{[t_1,t_2)}^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m+1)}$ are the kernels from decomposition (16) (which is decomposition (5) for the extended stochastic integral $\int_{t_1}^{t_2} F(u)\widehat{d}L_u$), these kernels are constructed by $F^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}$ from decomposition (12) for F. On the other hand, by (30), (16) and (12)

$$\int_{t_1}^{t_2} (DF(u))(f^{(1)})\widehat{d}L_u = \sum_{m=1}^\infty m :\langle \circ^{\otimes m}, \widehat{(F^{(m)}, f^{(1)})}_{ext\,[t_1,t_2)}\rangle:,$$
$$\int_{t_1}^{t_2} F(u)f^{(1)}(u)du = \sum_{m=0}^\infty :\langle \circ^{\otimes m}, \int_{t_1}^{t_2} F_u^{(m)} f^{(1)}(u)du\rangle:,$$

where the integrals $\int_{t_1}^{t_2} F_u^{(m)} f^{(1)}(u)du \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$ are Pettis ones. Therefore, in order to prove equality (35) it is sufficient to show that for each $m \in \mathbb{Z}_+$

$$(m+1)(\widehat{F}_{[t_1,t_2)}^{(m)}, f^{(1)})_{ext} = m\widehat{(F^{(m)}, f^{(1)})}_{ext\,[t_1,t_2)} + \int_{t_1}^{t_2} F_u^{(m)} f^{(1)}(u)du$$

in $\mathcal{H}_{ext}^{(m)}$. In turn, in order to prove this equality, it is sufficient to show that for each $g^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$

$$(m+1)((\widehat{F}_{[t_1,t_2)}^{(m)}, f^{(1)})_{ext}, g^{(m)})_{ext}$$
$$= m(\widehat{(F^{(m)}, f^{(1)})}_{ext\,[t_1,t_2)}, g^{(m)})_{ext} + \Big(\int_{t_1}^{t_2} F_u^{(m)} f^{(1)}(u)du, g^{(m)}\Big)_{ext}. \tag{37}$$

Using (27), the equality $(\widehat{F}_{[t_1,t_2)}^{(m)}, h^{(m+1)})_{ext} = \int_{t_1}^{t_2} (F_u^{(m)}, h^{(m+1)}(u))_{ext}du$, $h^{(m+1)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m+1)}$, $h^{(m+1)}(\cdot) \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}$ (see Lemma 2), which is proved in [21], the symmetry of $g^{(m)}$, and the non-atomicity of the Lebesgue measure, we obtain

$$(m+1)((\widehat{F}_{[t_1,t_2)}^{(m)}, f^{(1)})_{ext}, g^{(m)})_{ext} = (m+1)(\widehat{F}_{[t_1,t_2)}^{(m)}, g^{(m)} \diamond f^{(1)})_{ext}$$
$$= (m+1)\int_{t_1}^{t_2} (F_u^{(m)}, (g^{(m)} \diamond f^{(1)})(u))_{ext}du = \int_{t_1}^{t_2} \big(F_u^{(m)}, g^{(m)}(\cdot_1, \widetilde{\cdots, \cdot_m})f^{(1)}(u)$$
$$+ g^{(m)}(\widetilde{\cdot_2, \cdots}, u)f^{(1)}(\cdot_1) + \cdots + g^{(m)}(u, \widetilde{\cdots, \cdot_{m-1}})f^{(1)}(\cdot_m)\big)_{ext}du \tag{38}$$
$$= \Big(\int_{t_1}^{t_2} F_u^{(m)} f^{(1)}(u)du, g^{(m)}\Big)_{ext}$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} \big(F_u^{(m)}, g^{(m)}(\widetilde{\cdot_2, \cdots}, u)f^{(1)}(\cdot_1) + \cdots + g^{(m)}(u, \widetilde{\cdots, \cdot_{m-1}})f^{(1)}(\cdot_m)\big)_{ext}du.$$

On the other hand, by analogy with (38) we obtain

$$m(\widehat{(F^{(m)}, f^{(1)})}_{ext\,[t_1,t_2)}, g^{(m)})_{ext} = m\int_{t_1}^{t_2} ((F_u^{(m)}, f^{(1)})_{ext}, g^{(m)}(u))_{ext}du$$
$$= m\int_{t_1}^{t_2} (F_u^{(m)}, (g^{(m)}(u)) \diamond f^{(1)})_{ext}du = \int_{t_1}^{t_2} \big(F_u^{(m)}, g^{(m)}(\widetilde{\cdot_2, \cdots}, u)f^{(1)}(\cdot_1) \tag{39}$$
$$+ g^{(m)}(\widetilde{\cdot_3, \cdots}, u, \cdot_1)f^{(1)}(\cdot_2) + \cdots + g^{(m)}(u, \widetilde{\cdots, \cdot_{m-1}})f^{(1)}(\cdot_m)\big)_{ext}du.$$

Substituting (39) into (38), we obtain (37).

Now it remains to prove that $(D\int_{t_1}^{t_2} F(u)\widehat{d}L_u)(f^{(1)}) \in (L^2)_{q-1}^\beta$ if $F \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}$ (it follows directly from the definitions of the extended stochastic integral and of the operators of stochastic differentiation that $(D\int_{t_1}^{t_2} F(u)\widehat{d}L_u)(f^{(1)}) \in (L^2)_{q-2}^\beta$, but this statement can be amplified).

In fact, by (36), (8), (28) and (14)

$$\Big\|(D\int_{t_1}^{t_2}F(u)\widehat{d}L_u)(f^{(1)})\Big\|_{q-1,\beta}^2=\sum_{m=0}^{\infty}(m!)^{1+\beta}2^{(q-1)m}(m+1)^2|(\widehat{F}^{(m)}_{[t_1,t_2)},f^{(1)})_{ext}|^2_{ext}$$
$$\leq\sum_{m=0}^{\infty}(m!)^{1+\beta}2^{qm}[2^{-m}(m+1)^2]|\widehat{F}^{(m)}_{[t_1,t_2)}|^2_{ext}|f^{(1)}|^2_{ext}$$
$$\leq|f^{(1)}|^2_{ext}c\sum_{m=0}^{\infty}(m!)^{1+\beta}2^{qm}|F^{(m)}|^2_{\mathcal{H}^{(m)}_{ext}\otimes\mathcal{H}}=|f^{(1)}|^2_{ext}c\|F\|^2_{(L^2)^\beta_q\otimes\mathcal{H}}<\infty,$$

where $c=\max_{m\in\mathbb{Z}_+}[2^{-m}(m+1)^2]$. □

Remark 5. *Taking into account equality* (34), *one can write formally* $\partial_\cdot\circ=(D\circ)(\delta_\cdot)$, *where* $\delta_\cdot$ *is the Dirac delta-function concentrated at* $\cdot$. *In order to give a nonformal sense to this equality, one can consider a stochastic differentiation on so-called spaces of nonregular generalized functions, it will be done in another paper.*

As is easily seen, the results of Theorems 1, 2 hold true (up to obvious modifications) if we consider the operators of stochastic differentiation on the spaces $(L^2)^\beta$, $\beta\in[-1,1]$.

Remark 6. *As is known ([17, 18]), in the Meixner white noise analysis the operator of stochastic differentiation D is a differentiation with respect to a Wick product. In the Lévy white noise analysis this result holds true, the detailed presentation will be given in another paper.*

2.2 The case of unbounded operators

Sometimes it can be useful to consider $(D^n\circ)(f^{(n)})$, $f^{(n)}\in\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$, $n\in\mathbb{N}$, as an operator acting in $(L^2)^\beta_q$ (we remind that, for example, $(L^2)^0_0=(L^2)$). If $\beta=1$ then this operator can be defined by formula (30) as a linear continuous one (see Remark 4), but for $\beta\in[-1,1)$ this is not the case. Let us accept a corresponding definition.

Definition 7. *Let* $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}\in\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$. *We define an operator*

$$(D^n\circ)(f^{(n)}):(L^2)^\beta_q\to(L^2)^\beta_q \tag{40}$$

with the domain

$$\operatorname{dom}((D^n\circ)(f^{(n)}))=\{F\in(L^2)^\beta_q:\|(D^nF)(f^{(n)})\|^2_{q,\beta}$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}(m!)^{1+\beta}2^{qm}\Big(\frac{(m+n)!}{m!}\Big)^2|(F^{(m+n)},f^{(n)})_{ext}|^2_{ext}<\infty\} \tag{41}$$

(here $F^{(m)}\in\mathcal{H}^{(m)}_{ext}$ *are the kernels from decomposition* (5) *for F) by formula* (30).

Proposition 4. *Operator* (40) *with domain* (41) *is a closed one.*

Proof. Let us show that there exists a second adjoint to $(D^n\circ)(f^{(n)})$ operator $(D^n\circ)(f^{(n)})^{**}=(D^n\circ)(f^{(n)})$ (it is well known that an adjoint operator is a closed one). Since, obviously, the domain of operator (40) is a dense set in $(L^2)^\beta_q$, the adjoint operator $(D^n\circ)(f^{(n)})^*:(L^2)^{-\beta}_{-q}\to(L^2)^{-\beta}_{-q}$ is well defined. By definition, $G\in\operatorname{dom}((D^n\circ)(f^{(n)})^*)$ if and only if

$$(L^2)^\beta_q\supset\operatorname{dom}((D^n\circ)(f^{(n)}))\ni F\mapsto\langle\langle(D^nF)(f^{(n)}),G\rangle\rangle_{(L^2)}$$

is a linear continuous functional. By properties of Hilbert equipments the last is possible if and only if there exists $K\in(L^2)^{-\beta}_{-q}$ such that $\langle\langle(D^nF)(f^{(n)}),G\rangle\rangle_{(L^2)}=\langle\langle F,K\rangle\rangle_{(L^2)}$. But by the calculation in the proof of statement 3) in Theorem 1 K has form (32), therefore

$$\operatorname{dom}((D^n\circ)(f^{(n)})^*)=\{G\in(L^2)^{-\beta}_{-q}:\|(D^nG)(f^{(n)})^*\|^2_{-q,-\beta}$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}((m+n)!)^{1-\beta}2^{-q(m+n)}|G^{(m)}\diamond f^{(n)}|^2_{ext}<\infty\},$$

this set is a dense one in $(L^2)^{-\beta}_{-q}$, hence $(D^n\circ)(f^{(n)})^{**}:(L^2)^\beta_q\to(L^2)^\beta_q$ is well defined. Now it remains to show that

$$\operatorname{dom}((D^n\circ)(f^{(n)})^{**})=\operatorname{dom}((D^n\circ)(f^{(n)})). \tag{42}$$

By analogy with the consideration above, $F\in\operatorname{dom}((D^n\circ)(f^{(n)})^{**})$ if and only if

$$(L^2)^{-\beta}_{-q}\supset\operatorname{dom}((D^n\circ)(f^{(n)})^*)\ni G\mapsto\langle\langle F,(D^nG)(f^{(n)})^*\rangle\rangle_{(L^2)}$$

is a linear continuous functional. The last is possible if and only if there exists $H\in(L^2)^\beta_q$ such that $\langle\langle F,(D^nG)(f^{(n)})^*\rangle\rangle_{(L^2)}=\langle\langle H,G\rangle\rangle_{(L^2)}$. It is clear that H has form (30), therefore equality (42) follows from (41). □

Remark 7. *Let*

$$A_n:=\{F\in(L^2)^\beta_q:\sum_{m=0}^{\infty}(m!)^{1+\beta}2^{qm}\Big(\frac{(m+n)!}{m!}\Big)^2|F^{(m+n)}|^2_{ext}<\infty\},\quad n\in\mathbb{N},$$

here $F^{(m)}\in\mathcal{H}^{(m)}_{ext}$ *are the kernels from decomposition* (5) *for F. For each* $f^{(n)}\in\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ *we define an operator* $(\widetilde{D}^n\circ)(f^{(n)}):(L^2)^\beta_q\to(L^2)^\beta_q$ *with the domain* A_n *by formula* (30). *It follows from Proposition 4 that this operator is closable (its closure is equal to* $(D^n\circ)(f^{(n)})$*). Moreover, for each* $F\in A_n$ *the operator* $(\widetilde{D}^nF)(\circ):\mathcal{H}^{(n)}_{ext}\to(L^2)^\beta_q$ *is a linear bounded (and, therefore, continuous) one: by* (30), (8) *and* (28)

$$\|(\widetilde{D}^nF)(f^{(n)})\|^2_{q,\beta}=\sum_{m=0}^{\infty}(m!)^{1+\beta}2^{qm}\Big(\frac{(m+n)!}{m!}\Big)^2|(F^{(m+n)},f^{(n)})_{ext}|^2_{ext}$$
$$\leq|f^{(n)}|^2_{ext}\sum_{m=0}^{\infty}(m!)^{1+\beta}2^{qm}\Big(\frac{(m+n)!}{m!}\Big)^2|F^{(m+n)}|^2_{ext}.$$

It is clear that the results of Theorems 1, 2 hold true (up to obvious modifications) for operators (40).

REFERENCES

[1] Benth F.E. *The Gross derivative of generalized random variables.* Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 1999, **2** (3), 381–396.

[2] Benth F.E., Di Nunno G., Lokka A., Oksendal B., Proske F. *Explicit representation of the minimal variance portfolio in markets driven by Lévy processes.* Math. Finance 2003, **13** (1), 55–72.

[3] Berezansky Yu.M., Sheftel Z.G., Us G.F. Functional Analysis, Vol. 2. Birkhäuser Verlag, Basel–Boston–Berlin, 1996. (Russian edition: Vyshcha shkola, Kyiv, 1990.)

[4] Bertoin J. Lévy Processes. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[5] Di Nunno G., Oksendal B., Proske F. Malliavin Calculus for Lévy Processes with Applications to Finance. In: Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[6] Di Nunno G., Oksendal B., Proske F. *White noise analysis for Lévy processes*. J. Funct. Anal. 2004, **206** (1), 109–148. doi:10.1016/S0022-1236(03)00184-8

[7] Dyriv M.M., Kachanovsky N.A. *Operators of stochastic differentiation on spaces of regular test and generalized functions in the Lévy white noise analysis*. Research Bulletin of National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute" 2014, **4**, in print.

[8] Dyriv M.M., Kachanovsky N.A. *Stochastic integrals with respect to a Levy process and stochastic derivatives on spaces of regular test and generalized functions*. Research Bulletin of National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute" 2013, **4**, 27–30.

[9] Gelfand I.M., Vilenkin N.Ya. Generalized Functions. In: Applications of Harmonic Analysis, 6. Academic Press, New York, London, 1964.

[10] Gihman I.I., Skorohod A.V. Theory of Random Processes, Vol. 2. Nauka, Moscow, 1973.

[11] Holden H., Oksendal B., Uboe J., Zhang T.-S. Stochastic Partial Differential Equations. A Modeling, White Noise Functional Approach. In: Probability and Its Applications. Birkhäuser, Boston, 1996.

[12] Itô K. *Spectral type of the shift transformation of differential processes with stationary increments*. Trans. Am. Math. Soc. 1956, **81**, 253–263.

[13] Kabanov Yu.M. *Extended stochastic integrals*. Teorija Verojatnostej i ee Pril. 1975, **20** (4), 725–737.

[14] Kabanov Yu.M., Skorohod A.V. *Extended stochastic integrals*. In: Proc. School-Symposium "Theory Stoch. Proc.", Druskininkai, Lietuvos Respublika, November 25–30, 1974, Inst. Phys. Math., Vilnus, 1975, 123–167.

[15] Kachanovsky N.A. *A generalized Malliavin derivative connected with the Poisson- and Gamma-measures*. Methods Funct. Anal. Topol. 2003, **9** (3), 213–240.

[16] Kachanovsky N.A. *A generalized stochastic derivative on the Kondratiev-type space of regular generalized functions of Gamma white noise*. Methods Funct. Anal. Topol. 2006, **12** (4), 363–383.

[17] Kachanovsky N.A. *Generalized stochastic derivatives on a space of regular generalized functions of Meixner white noise*. Methods Funct. Anal. Topol. 2008, **14** (1), 32–53.

[18] Kachanovsky N.A. *Generalized stochastic derivatives on parametrized spaces of regular generalized functions of Meixner white noise*. Methods Funct. Anal. Topol. 2008, **14** (4), 334–350.

[19] Kachanovsky N.A. *Extended stochastic integrals with respect to a Lévy process on spaces of generalized functions*. Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. 2013, **10**, 169–188.

[20] Kachanovsky N.A. *On an extended stochastic integral and the Wick calculus on the connected with the generalized Meixner measure Kondratiev-type spaces*. Methods Funct. Anal. Topol. 2007, **13** (4), 338–379.

[21] Kachanovsky N.A. *On extended stochastic integrals with respect to Lévy processes*. Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (2), 256–278. doi:10.15330/cmp.5.2.256-278

[22] Lytvynov E.W. *Orthogonal decompositions for Lévy processes with an application to the gamma, Pascal, and Meixner processes*. Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2003, **6** (1), 73–102.

[23] Meyer P.A. Quantum Probability for Probabilists. In: Lect. Notes in Math., 1538. Springer–Verlag, Berlin, 1993.

[24] Nualart D., Schoutens W. *Chaotic and predictable representations for Lévy processes*. Stochastic Process. Appl. 2000, **90** (1), 109–122.

[25] Protter P. Stochastic Integration and Differential Equations. Springer, Berlin, 1990.

[26] Sato K. Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. In: Cambridge University Studies in Advanced Mathematics, 68. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[27] Schoutens W. Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials. In: Lect. Notes in Statist., 146. Springer–Verlag, 2000.

[28] Skorohod A.V. Integration in Hilbert Space. Springer, New York–Heidelberg, 1974.

[29] Skorohod A.V. *On a generalization of a stochastic integral*. Teorija Verojatnostej i ee Pril. 1975, **20** (2), 223–238.

[30] Solé J.L., Utzet F., Vives J. *Chaos expansions and Malliavin calculus for Lévy processes*. In: Stoch. Anal. and Appl., Abel Symposium 2, Springer, Berlin, 2007, 595–612.

[31] Surgailis D. *On L^2 and non-L^2 multiple stochastic integration*. In: Lect. Notes in Control and Information Sciences, 36, Springer-Verlag, 1981, 212–226.

[32] Ustunel A.S. An Introduction to Analysis on Wiener Space. In: Lect. Notes in Math., Vol. 1610, Springer–Verlag, Berlin, 1995.

Received 14.04.2014

Дирів М.М., Качановський М.О. *Про оператори стохастичного диференціювання на просторах регулярних основних та узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві* // Карпатські матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 212–229.

Оператори стохастичного диференціювання, які є тісно пов'язаними із розширеним стохастичним інтегралом Скорохода та зі стохастичною похідною Хіди, грають важливу роль у класичному (гауссівському) аналізі білого шуму. Зокрема, ці оператори можна використовувати для вивчення властивостей розширеного стохастичного інтеграла та розв'язків стохастичних рівнянь з нелінійностями віківського типу.

У цій статті ми вводимо та вивчаємо обмежені і необмежені оператори стохастичного диференціювання у аналізі білого шуму Леві. Точніше, ми розглядаємо ці оператори на просторах параметризованого регулярного оснащення простору квадратично інтегровних за мірою білого шуму Леві функцій, використовуючи литвинівське узагальнення властивості хаотичного розкладу. Це дає можливість розширити на аналіз білого шуму Леві та поглибити відповідні результати класичного аналізу білого шуму.

Ключові слова і фрази: оператор стохастичного диференціювання, стохастична похідна, розширений стохастичний інтеграл, процес Леві.

Дырив М.Н., Качановский Н.А. *Об операторах стохастического дифференцирования на пространствах регулярных основных и обобщенных функций анализа белого шума Леви* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 212–229.

Операторы стохастического дифференцирования, тесно связанные с расширенным стохастическим интегралом Скорохода и со стохастической производной Хиды, играют важную роль в классическом (гауссовском) анализе белого шума. В частности, эти операторы можно использовать для изучения свойств расширенного стохастического интеграла и решений стохастических уравнений с нелинейностями виковского типа.

В этой статье мы вводим и изучаем ограниченные и неограниченные операторы стохастического дифференцирования в анализе белого шума Леви. Точнее, мы рассматриваем эти операторы на пространствах параметризованного регулярного оснащения пространства квадратично интегрируемых по мере белого шума Леви функций, используя литвиновское обобщение свойства хаотического разложения. Это дает возможность расширить на анализ белого шума Леви и углубить соответствующие результаты классического анализа белого шума.

Ключевые слова и фразы: оператор стохастического дифференцирования, стохастическая производная, расширенный стохастический интеграл, процесс Леви.

ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, 6 (2), 230–236
doi:10.15330/cmp.6.2.230-236

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатськi матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.230–236

ERSHOVA YU.YU.[1], KARPENKO I.I.[2], KISELEV A.V.[3]

ON INVERSE TOPOLOGY PROBLEM FOR LAPLACE OPERATORS ON GRAPHS

Laplacian operators on finite compact metric graphs are considered under the assumption that matching conditions at graph vertices are of δ type. Under one additional assumption, the inverse topology problem is treated. Using the apparatus of boundary triples, we generalize and extend existing results on necessary conditions of isospectrality of two Laplacians defined on different graphs. A result is also given covering the case of Schrödinger operators.

Key words and phrases: quantum graphs, Schrödinger operator, Laplace operator, inverse spectral problem, boundary triples, isospectral graphs.

[1] Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, 3 Tereschenkivska str., 01601, Kyiv, Ukraine
[2] Vernadsky Taurida National University, 4 Vernadsky avenue, 95007, Simferopol, Ukraine
[3] Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 3b Naukova str., 79060, Lviv, Ukraine
E-mail: julija.ershova@gmail.com (Ershova Yu.Yu.), i_karpenko@ukr.net (Karpenko I.I.), alexander.v.kiselev@gmail.com (Kiselev A.V.)

INTRODUCTION

In the present paper we focus our attention on the so-called quantum graph, i.e., a metric graph Γ with an associated second-order differential operator acting in Hilbert space $L^2(\Gamma)$ of square summable functions with an additional assumption that functions belonging to the domain of the operator are coupled by certain matching conditions at graph vertices. Recently these operators have attracted a considerable interest of both physicists and mathematicians due to a number of important physical applications. Extensive literature on the subject is surveyed in, e.g., [4,19].

The present paper is devoted to the study of the following inverse spectral problem for Laplace and Schrödinger operators on finite compact metric graphs: given spectral data (i.e., the spectrum of the operator), edge potentials and matching conditions, to reconstruct the underlying metric graph.

There exists an extensive literature devoted to the named problem. To name just a few, we would like to mention pioneering works [13,16,24] and later contributions [14,20,21]. Different approaches to the same problem were developed, e.g., in [2,3,23].

In our papers [6–9] we suggested an approach to inverse spectral problems on graphs based on the theory of boundary triples, leading to the asymptotic analysis of Weyl-Titchmarsh M-function of the graph. In the cited papers this argument was successfully applied to the study of a different (although related) inverse spectral problem on graphs. This approach will be also used throughout the present paper.

Here we consider the case of a general connected compact finite metric graph under the only *additional assumption* that (cf. [1]) *it does not contain: (i) loops; (ii) cycles with all edges having pairwise rationally dependent edge lengths.* This restriction is equivalent to the fact that the

УДК 517.28
2010 *Mathematics Subject Classification:* Primary 47A10; Secondary 34A55, 81Q35.
The third authors' work was partially supported by the RFBR, grant no. 12-01-00215-a.

minimal operator *naturally associated* with the graph is simple, i.e., has no reducing self-adjoint "parts". We also assume that each graph vertex is allowed to have matching of δ type only (see Section 1 for definitions). The named class proves to be physically viable [10,11].

The general case of arbitrary graphs with vertices of both δ and δ' types will be treated in a separate publication.

1 PRELIMINARIES

1.1 Definition of the Laplace operator on a quantum graph

We call $\Gamma = \Gamma(\mathbf{E}_\Gamma, \sigma)$ a finite compact metric graph, if it is a collection of a finite non-empty set $\mathbf{E}_\Gamma$ of compact intervals $e_j = [x_{2j-1}, x_{2j}]$, $j = 1, 2, \dots, n$, called *edges*, and of a partition σ of the set of endpoints $\{x_k\}_{k=1}^{2n}$ into N classes, $\mathbf{V}_\Gamma = \bigcup_{m=1}^N V_m$. The equivalence classes V_m, $m = 1, 2, \dots, N$ will be called *vertices* and the number of elements belonging to the set V_m will be called the *valence* (or, alternatively, *degree*) of the vertex V_m (denoted $\deg V_m \equiv \gamma_m$).

Whenever we need to consider a different graph $\tilde\Gamma$ of the same class alongside the graph Γ, we will use the same notation for all objects pertaining to it, having decorated each symbol (n, N, γ_m, etc.) with a tilde.

With a finite compact metric graph Γ we associate Hilbert spaces $L_2(\Gamma) = \oplus_{j=1}^n L_2(e_j)$ and $W_2^2(\Gamma) = \oplus_{j=1}^n W_2^2(e_j)$. These spaces obviously do not feel the graph connectivity, being the same for each graph with the same number of edges of same lengths.

For a smooth enough function $f \in L_2(\Gamma)$, we will use throughout the following definition of the normal derivative on a finite compact metric graph

$$\partial_n f(x_j) = \begin{cases} f'(x_j), & \text{if } x_j \text{ is the left endpoint of the edge,} \\ -f'(x_j), & \text{if } x_j \text{ is the right endpoint of the edge.} \end{cases}$$

If $f \in \oplus_{j=1}^n W_2^2(e_j)$ and α_m is a complex number (referred to below as a coupling constant), the condition of continuity of the function f through the vertex V_m (i.e., $f(x_j) = f(x_k)$ if $x_j, x_k \in V_m$) together with the condition

$$\sum_{x_j \in V_m} \partial_n f(x_j) = \alpha_m f(V_m)$$

is called δ-type matching at the vertex V_m.

Note that the δ-type matching condition in a particular case when $\alpha_m = 0$ reduces to the so-called standard, or Kirchhoff, matching condition at the vertex V_m.

The graph Laplacian $A_{\vec\alpha}$ on a graph Γ with δ-type matching conditions is the operator of negative second derivative in the Hilbert space $L_2(\Gamma)$ on the domain of functions belonging to the Sobolev space $\oplus_{j=1}^n W_2^2(e_j)$ and satisfying δ-type matching conditions at every vertex V_m, $m = 1, 2, \dots, N$. The corresponding Schrödinger operator on the same graph is defined likewise on the same domain in the case of summable edge potentials.

Provided that all coupling constants α_m, $m = 1 \dots N$, are real, it is easy to ascertain that the operator $A_{\vec\alpha}$ is a proper self-adjoint extension of a closed symmetric operator $A_{\min}$ in Hilbert space $L_2(\Gamma)$ [10,15].

Clearly, the self-adjoint operator thus defined on a finite compact metric graph has purely discrete spectrum that accumulates to $+\infty$.

Note that w.l.o.g. each edge e_j of the graph Γ can be considered to be an interval $[0, l_j]$, where $l_j = x_{2j} - x_{2j-1}$, $j = 1, \dots, n$ is the length of the corresponding edge. Throughout the present paper we will therefore only consider this situation.

1.2 Boundary triples and the Weyl-Titchmarsh matrix M-function

The analysis presented in the present paper is essentially based on the theory of boundary triples [5, 12, 17, 18] applied to the class of operators introduced above. Two fundamental concepts of this theory are those of a boundary triple and of the Titchmarsh-Weyl generalized matrix-function. Assume that $A_{\min}$ is a symmetric densely defined operator in Hilbert space H, and that its deficiency indices are equal. Put $A_{\max} := A^*_{\min}$.

The property of the Weyl-Titchmarsh M-function that makes it the tool of choice for the analysis of isospectral Laplacians on graphs can be formulated in the following way: provided that A_B is an almost solvable extension of a simple[1] symmetric operator $A_{\min}$ parameterized by a (self-adjoint) matrix B, $\lambda_0 \in \rho(A_B)$ if and only if $(B - M(\lambda))^{-1}$ admits analytic continuation into the point λ_0.

In [8], we have obtained the following

Proposition 1 ([8]). *Let Γ be a finite compact metric graph having no loops and with coupling of δ type at all vertices. There exists a closed densely defined symmetric operator $A_{\min}$ and a boundary triple such that the operator $A_{\vec{\alpha}}$ is an almost solvable extension of $A_{\min}$, for which the parameterizing matrix B is nothing but $\operatorname{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$, whereas the generalized Weyl-Titchmarsh M-function is a $N \times N$ matrix with matrix elements given by the following formula*

$$m_{jk}(\lambda) = \begin{cases} -\mu \sum_{e_t \in E_k} \cot \mu l_t, & j = k, \\ \mu \sum_{e_t \in C_{kj}} \frac{1}{\sin \mu l_t}, & j \neq k, \ V_j \text{ is adjacent to } V_k, \\ 0, & j \neq k, \ V_j \text{ is a vertex not adjacent to } V_k. \end{cases}$$

Here $\mu = \sqrt{\lambda}$ (the branch such that $\operatorname{Im} \mu \geq 0$), l_t is the length of e_t, E_k is the set of graph edges incident to the vertex V_k, C_{kj} is the set of graph edges connecting vertices V_k and V_j.

The result of [1] further implies that under the additional assumption formulated in Introduction the minimal operator $A_{\min}$ is simple. This means that *each* eigenvalue of $A_{\vec{\alpha}}$ is a pole of the meromorphic matrix-function $(B - M(\lambda))^{-1}$ for $B = \operatorname{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ with multiplicity equal to the multiplicity of the eigenvalue.

In essence, we will build our analysis upon the foundation provided by Proposition 1 and the latter remark.

2 ISOSPECTRALITY OF GRAPH LAPLACIANS

In the present Section, we formulate the main results of the paper. We start with the following

Theorem 1. *Let Γ and $\tilde{\Gamma}$ be two finite compact metric graphs subject to the assumption of Introduction with all vertices of δ type. Let $A_{\vec{\alpha}}$, $\tilde{A}_{\tilde{\vec{\alpha}}}$ be two graph Laplacians on Γ and $\tilde{\Gamma}$, parameterized by coupling constants $\{\alpha_k\}$ and $\{\tilde{\alpha}_k\}$, respectively. If (point) spectra of the operators $A_{\vec{\alpha}}$ and $\tilde{A}_{\tilde{\vec{\alpha}}}$ coincide counting multiplicities, then (i) total lengths of Γ and $\tilde{\Gamma}$ are equal, $\sum_i l_i = \sum_i \tilde{l}_i$; (ii) Euler characteristics[2] of Γ and $\tilde{\Gamma}$ are equal, $\chi_\Gamma = \chi_{\tilde{\Gamma}}$; (iii) the set equality $\Sigma = \tilde{\Sigma}$ holds, where $\Sigma := \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ is the set of non-zero elements of the list $\{\alpha_i / \gamma_i\}_{i=1}^N$ and $\tilde{\Sigma}$ is defined analogously for the graph $\tilde{\Gamma}$.*

[1] I.e., there exists no reducing subspace H_0 such that the restriction $A_{\min}|H_0$ is a selfadjoint operator in H_0.

[2] Recall that the Euler characteristic of a graph is the difference between the number of vertices and the number of edges.

Remark 1. *The implication (i) also follows from the Weyl-type asymptotics of (discrete) spectra which evidently holds for both Laplacians.*

The implication (ii) is a generalization of [21, 23] where this result was proved in the case of Kirchhoff matching conditions at all vertices to the general case of arbitrary δ coupling.

Note finally that the set equality of (iii) is only meaningful if at least some coupling constants of $A_{\vec{\alpha}}$ are non-zero (and hence the same number of coupling constants pertaining to $\tilde{A}_{\tilde{\vec{\alpha}}}$ is non-zero). Therefore, the case of Kirchhoff matching turns out to be the most complicated as (iii) then yields no information.

Proof. Let $\Pi(\lambda) = \prod_{e \in \mathbf{E}_\Gamma} \frac{\sin l_j \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$ and let $\tilde{\Pi}(\lambda)$ be defined analogously for the graph $\tilde{\Gamma}$. Then the functions $\Pi(\lambda) \det(B - M(\lambda))$ and $\tilde{\Pi}(\lambda) \det(\tilde{B} - \tilde{M}(\lambda))$, where M and $\tilde{M}$ are Weyl-Titchmarsh matrices of Proposition 1 pertaining to Γ and $\tilde{\Gamma}$, respectively, are entire functions of exponential type of order not greater than $1/2$ (see [22, Chapter I]). Moreover, zeroes of these two functions are located precisely at the eigenvalues of the operators $A_{\vec{\alpha}}$, $\tilde{A}_{\tilde{\vec{\alpha}}}$, respectively (counting multiplicities). This follows from [5, 12] using: (i) the fact that an M-matrix of Proposition 1 is a matrix-valued R-function with almost everywhere Hermitian boundary values on $\mathbb{R}$; (ii) the fact that the poles of an M-matrix of Proposition 1 are located at the eigenvalues of the Dirichlet decoupling of the graph Γ, counting multiplicities; (iii) the fact that within conditions of the Theorem, both $A_{\min}$ and $\tilde{A}_{\min}$ are simple.

Then the condition of isospectrality implies that the fraction $\frac{\Pi(\lambda) \det(B - M(\lambda))}{(\tilde{\Pi}(\lambda) \det(\tilde{B} - \tilde{M}(\lambda))}$ is [22] again an entire function of exponential type of order not greater than $1/2$. Applying the Hadamard theorem, one easily obtains

$$\frac{\Pi(\lambda) \det(B - M(\lambda))}{\tilde{\Pi}(\lambda) \det(\tilde{B} - \tilde{M}(\lambda))} = \exp(a) \tag{1}$$

for some finite constant a.

Consider asymptotic expansions of the functions $\det(B - M(\lambda))$ and $\det(\tilde{B} - \tilde{M}(\lambda))$ as $\lambda \to -\infty$ along the real line. Using the asymptotic expansion for $M(\lambda)$ following easily from Proposition 1 one has

$$\det(B - M(\lambda)) = \prod_{i=1}^{N} (\alpha_i + \gamma_i \tau) + o(\tau^{-M}); \quad \det(\tilde{B} - \tilde{M}(\lambda)) = \prod_{i=1}^{\tilde{N}} (\tilde{\alpha}_i + \tilde{\gamma}_i \tau) + o(\tau^{-M})$$

for any natural $M > 0$, where $\tau = -i\sqrt{\lambda} \to +\infty$. Using asymptotic expansions for $\Pi(\lambda)$ and $\tilde{\Pi}(\lambda)$ and (1), one immediately ascertains (i) and then (ii), which leads to

$$\frac{2^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{N} (\frac{\alpha_i}{\tau} + \gamma_i) + o(\tau^{-M})}{2^n \prod_{i=1}^{\tilde{N}} (\frac{\tilde{\alpha}_i}{\tau} + \tilde{\gamma}_i) + o(\tau^{-M})} = \exp a, \tag{2}$$

wherefrom $\exp a = (2^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{N} \gamma_i) / (2^n \prod_{i=1}^{\tilde{N}} \tilde{\gamma}_i)$. One then divides both sides of (2) by $\exp a$. Taking the logarithm of the result, one arrives at

$$\sum_{i=1}^{N} \ln\Big(1 + \frac{\alpha_i}{\gamma_i} \frac{1}{\tau}\Big) - \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \ln\Big(1 + \frac{\tilde{\alpha}_i}{\tilde{\gamma}_i} \frac{1}{\tau}\Big) + o(\tau^{-M}) = 0.$$

The Taylor expansion of logarithms yields that for any natural M

$$-\sum_{j=1}^{M} \frac{(-1)^j}{j\tau^j} \sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{\alpha_i}{\gamma_i}\Big)^j + \sum_{j=1}^{M} \frac{(-1)^j}{j\tau^j} \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \Big(\frac{\tilde{\alpha}_i}{\tilde{\gamma}_i}\Big)^j + o(\tau^{-M}) = 0.$$

Comparing coefficients at equal powers of τ now yields

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{(-\alpha_i)^m}{\gamma_i^m}=\sum_{i=1}^{\tilde N}\frac{(-\tilde\alpha_i)^m}{\tilde\gamma_i^m}$$

for any natural m. Using the argument of [8, Lemma 5.1] now completes the proof. □

Remark 2. *Theorem 1 admits an extension to the case of graph Schrödinger operators. Indeed, assertions (i) and (ii) will be valid for a pair of Schrödinger operators on Γ and $\tilde\Gamma$, respectively, if one requires that (a) all edge potentials have zero means, $\int_e q_e(x)dx=0$ for any edge e, and (b) both minimal operators $A_{\min}$, $\tilde A_{\min}$ are simple. The proof follows the same argument as above, see [7] for necessary details.*

Our next result shows that even in the seemingly more complicated case of Kirchhoff matching one can in fact go one step further. The corresponding argument pertaining to the general situation of δ type matching as well as a detailed analysis of Schrödinger case to which the argument is also applicable will be scrutinized elsewhere. We have

Theorem 2. *Let Γ and $\tilde\Gamma$ be two finite compact metric graphs subject to the assumption of Introduction with all vertices of δ type. Let $A_{\vec 0}$, $\tilde A_{\vec 0}$ be two graph Laplacians on Γ and $\tilde\Gamma$ both with Kirchhoff matching conditions at all vertices. If (point) spectra of the operators $A_{\vec 0}$ and $\tilde A_{\vec 0}$ coincide counting multiplicities, then*

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} l_i}{\prod_{i=1}^{N}\frac{\gamma_i}{2}}\sum_{T\in\mathcal T} w(T)=\frac{\prod_{i=1}^{\tilde n}\tilde l_i}{\prod_{i=1}^{\tilde N}\frac{\tilde\gamma_i}{2}}\sum_{T\in\tilde{\mathcal T}} w(T),$$

where $\mathcal T$ and $\tilde{\mathcal T}$ are the sets of spanning trees for Γ and $\tilde\Gamma$, respectively; the weight of the tree $w(T)$ is the product of inverse lengths over all edges forming the subgraph T, $w(T)=\prod_{e\in T}\frac{1}{l_e}$.

Proof. Proceeding exactly as in the proof of Theorem 1 one gets the following identity

$$\frac{\Pi(\lambda)\det(-M(\lambda))}{\tilde\Pi(\lambda)\det(-\tilde M(\lambda))}=\frac{2^{\tilde n}\prod_{i=1}^{N}\gamma_i}{2^{n}\prod_{i=1}^{\tilde N}\tilde\gamma_i}. \tag{3}$$

The asymptotic expansion of the latter as $\lambda\to 0$ proves to suffice our needs. Indeed, both $M(\lambda)$ and $\tilde M(\lambda)$ tend to negative weighted discrete Laplacians of Γ and $\tilde\Gamma$, respectively (see [6] and Proposition 1), where the weight associated with any edge e is nothing but its inverse length. Therefore, both M-matrices have exactly one eigenvalue, say, $\mu_1(\lambda)$ ($\tilde\mu_1(\lambda)$, resp.) zeroing out at $\lambda=0$ (due to connectedness of both graphs, see [25]). Moreover, both μ_1 and $\tilde\mu_1$ are analytic R-functions owing to the analytic properties of M and $\tilde M$ and thus have simple zeroes at the named point. In fact, one can ascertain that $\mu_1'(0)=\sum_i l_i/N$ and the same holds true for $\tilde\mu_1'(0)$.

Indeed, the kernel of $M(0)$ is generated by the vector $\vec 1\equiv(1,1,\dots,1)^T$. An analytic expansion of the equality $M(\lambda)(\vec 1+\lambda f_1+O(\lambda^2))=\lambda(\mu_1'(0)+O(\lambda))(\vec 1+\lambda f_1+O(\lambda^2))$ then yields, considering linear in λ terms only

$$M_1\vec 1+M_0 f_1=\mu_1'(0)\vec 1,$$

where $M(\lambda)=M_0+\lambda M_1+O(\lambda^2)$. The solvability condition of the latter is nothing but

$$\langle\mu_1'(0)\vec 1-M_1\vec 1,\vec 1\rangle=0,$$

from where the claim follows by the property $\langle M_1\vec 1,\vec 1\rangle=\sum_i l_i$, which in turn follows trivially from Proposition 1 by Taylor series expansion.

Using Theorem 1 yet again, one reduces (3) to

$$2^n\frac{\prod_{i=1}^{n} l_i}{N\prod_{i=1}^{N}\gamma_i}\prod_{k=2}^{N}\mu_k(0)=2^{\tilde n}\frac{\prod_{i=1}^{\tilde n}\tilde l_i}{\tilde N\prod_{i=1}^{\tilde N}\tilde\gamma_i}\prod_{k=2}^{\tilde N}\tilde\mu_k(0),$$

where $\mu_2(0),\dots,\mu_N(0)$ and $\tilde\mu_2(0),\dots,\tilde\mu_{\tilde N}(0)$ are non-zero (positive) eigenvalues of weighted discrete Laplacians, associated with Γ and $\tilde\Gamma$, respectively. Using the generalized Matrix-Tree Theorem [25], one finally has

$$\frac{1}{N}\prod_{k=2}^{N}\mu_k(0)=\sum_{T\in\mathcal T} w(T);\quad \frac{1}{\tilde N}\prod_{k=2}^{\tilde N}\tilde\mu_k(0)=\sum_{T\in\tilde{\mathcal T}} w(T).$$

Using the assertion (ii) of Theorem 1, one now easily completes the proof. □

Example 1. *Assume that Γ is a tree with Kirchhoff matching at all vertices. The assumption of Introduction is surely met. Then Theorem 1 (ii) yields that $\tilde\Gamma$ has to be a tree as well provided that the condition of isospectrality is satisfied, in line with results of [21,23]. Theorem 2, however, leads to the following new strong additional condition, necessary for iospectrality*

$$\prod_{i=1}^{N}\frac{\gamma_i}{2}=\prod_{i=1}^{\tilde N}\frac{\tilde\gamma_i}{2}.$$

REFERENCES

[1] Ashurova E.N., Kandagura A.N., Karpenko I.I. *The criterion of simplicity for symmetric operator on a graph*, Methods Func. Anal. Topology 2014, **20** (2), 117–123.

[2] Belishev M. I., Vakulenko A. F. *Inverse problems on graphs: recovering the tree of strings by the BC-method.* J. Inverse Ill-Posed Probl. 2006, **14** (1), 29—46.

[3] Belishev M. I., Wada N. *On revealing graph cycles via boundary measurements.* Inverse Problems 2009, **25** (10), 105011, 21 pp.

[4] Berkolaiko G., Kuchment P. Introduction to Quantum Graphs. In: Mathematical Surveys and Monographs, 186. AMS, 2012.

[5] Derkach V. A., Malamud M. M. *Generalized resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps*, J. Funct. Anal. 1991, **95**, 1–95.

[6] Ershova Yu., Kiselev A.V. *Trace formulae for graph Laplacians with applications to recovering matching conditions.* Methods Funct. Anal. Topol. 2012, **18** (4), 343–359.

[7] Ershova Yu., Kiselev A.V. *Trace formulae for Schrödinger operators on metric graphs with applications to recovering matching conditions.* Methods Funct. Anal. Topol. 2014, **20** (2), 134–148.

[8] Ershova Yu., Karpenko I.I., Kiselev A.V. *Isospectrality for graph Laplacians under the change of coupling at graph vertices.* arXiv: 1405.2997 [math.sp]. To appear in: J. Spectr. Th.

[9] Ershova Yu., Karpenko I.I., Kiselev A.V. *Isospectrality for graph Laplacians under the change of coupling at graph vertices: necessary and sufficient conditions*, arXiv: 1405.5016 [math.sp]. To appear in: Mathematika (UCL).

[10] Exner P. *A duality between Schrödinger operators on graphs and certain Jacobi matrices.* Ann. Inst. H. Poincare 1997, **66**, 359–371.

[11] Exner P. *Lattice Kronig-Penney models.* Phys. Rev. Lett. 1995, **74**, 3503–3506.

[12] Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L. Boundary value problems for operator differential equations. [Translated and revised from the 1984 Russian original]. In: Mathematics and its Applications (Soviet Series), 48. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.

[13] Gutkin B., Smilansky U. *Can one hear the shape of a graph?*. J. Phys. A. 2001, **34**, 6061–6068.

[14] Kostrykin V., Potthoff J., Schrader R. *Heat kernels on metric graphs and a trace formula*. In: "Adventures in Mathematical Physics", Contemporary Mathematics, 447. Amer. Math. Soc., 2007, 175–198.

[15] Kostrykin V., Schrader R. *Kirchhoff's rule for quantum wires*. J. Phys. A. 1999, **32**, 595–630.

[16] Kottos T., Smilansky U. *Periodic orbit theory and spectral statistics for quantum graphs*. Ann. Physics 1999, **274**, 76–124.

[17] Kočubeĭ A. N. *On extension of symmetric operators and symmetric binary relations*. Math. Notes 1975, **17**, 41–48.

[18] Kočubeĭ A. N. *Characteristic functions of symmetric operators and their extensions*. Izv. Akad. Nauk Arm. SSR, Ser. Mat. 1980, **15**, **3**, 219–232. (in Russian)

[19] Kuchment P. *Quantum graphs: an introduction and a brief survey*. In: "Analysis on Graphs and its Applications", Proc. Symp. Pure. Math. AMS 2008, 291–314.

[20] Kurasov P., Nowaczyk M. *Inverse spectral problem for quantum graphs*. J. Phys. A: Mathematical and General 2005, **38**, 4901–4915. correction: J. Phys. A: Mathematical and General 2006, **39**, 993.

[21] Kurasov P., *Graph Laplacians and Topology*. Arkiv för Matematik 2008, **46**, 95–111.

[22] Levin, B. Ya. Lectures on entire functions. [In collaboration with and with a preface by Yu. Lyubarskii, M. Sodin and V. Tkachenko. Translated from the Russian manuscript by Tkachenko.] In: Translations of Mathematical Monographs, 150. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. xvi+248 pp.

[23] Pivovarchik V., Taystruk O. *On characteristic functions of operators on equilateral graphs*. Methods Funct. Anal. Topol. 2012, **18** (2), 189—197.

[24] Roth J.P. *Le spectre du Laplacien sur un graphe*. In: Théorie du Potentiel, Lect. Notes in Math., 1096. Orsay, 1983. 521–539.

[25] Tutte W. T. Graph theory. [With a foreword by C. St. J. A. Nash-Williams]. In: Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 21. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Reading, MA, 1984. xxi+333 pp.

Received 21.08.2014

Єршова Ю.Ю., Карпенко І.І., Кисельов О.В. *Про обернену задачу відновлення топології для операторів Лапласа на графах* // Карпатські матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 230–236.

Розглядаються оператори Лапласа на скінченних компактних метричних графах у припущенні, що умови зв'язку в вершинах графа мають δ-тип. При ще одному додатковому припущенні вивчається задача відновлення топології графа. З використанням апарата теорії граничних трійок узагальнені та доповнені результати, що вже існують, про необхідні умови ізоспектральності двох операторів Лапласа, котрі задані на різноманітних графах. Також наведений один окремий результат для оператора Шредінгера.

Ключові слова і фрази: квантові графи, оператор Шредінгера, оператор Лапласа, обернена спектральна задача, граничні трійки, ізоспектральні графи.

Ершова Ю.Ю., Карпенко И.И., Киселёв А.В. *Об обратной задаче восстановления топологии для операторов Лапласа на графах* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 230–236.

Рассматриваются операторы Лапласа на конечных компактных метрических графах в предположении, что условия связи в вершинах графа имеют δ-тип. При одном дополнительном предположении изучается задача восстановления топологии графа. С использованием аппарата теории граничных троек обобщены и дополнены существующие результаты о необходимых условиях изоспектральности двух операторов Лапласа, заданных на различных графах. Также приведен один частный результат для оператора Шредингера.

Ключевые слова и фразы: квантовые графы, оператор Шредингера, оператор Лапласа, обратная спектральная задача, граничные тройки, изоспектральные графы.

ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, 6 (2), 237–241
doi:10.15330/cmp.6.2.237-241

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.237–241

ЗАБОЛОЦЬКИЙ М.В., МОСТОВА М.Р.

АСИМПТОТИЧНЕ ПОВОДЖЕННЯ ЛОГАРИФМІЧНОЇ ПОХІДНОЇ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ

Отримано апроксимаційну теорему для логарифмічної похідної F цілих функцій нульового порядку і за її допомогою знайдено асимптотику F зовні виняткової множини.

Ключові слова і фрази: ціла функція, логарифмічна похідна, нульовий порядок, щільність, асимптотика.

Ivan Franko National University, 1 Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine
E-mail: m_zabol@franko.lviv.ua (Заболоцький М.В.), memyr23@gmail.com (Мостова М.Р.)

ВСТУП

Нехай f — ціла функція скінченного додатного порядку ρ, $\rho(r)$ — уточнений порядок f (див., наприклад, [1, с. 69]). Позначимо через $H_+^*(r^{\rho(r)})$ клас цілих функцій f цілком регулярного зростання (ц. р. зр.). Добре відомо, що ц. р. зр. цілої функції додатного нецілого порядку еквівалентне існуванню кутової щільності її нулів відносно функції порівняння $r^{\rho(r)}$.

Будемо говорити, що множина $E \subset \mathbb{C}$ має верхню μ-щільність, $1 < \mu \leq 2$, якщо її можна покрити такою послідовністю кругів $\{z\colon |z - z_j| < r_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, $z_j \to \infty$, що

$$D_\mu(E)\colon = \varlimsup_{r\to+\infty} r^{-\mu} \sum_{|z_j|\leq r} r_j^\mu = \eta,\ 0 \leq \eta < +\infty.$$

Сім'ю таких множин позначимо C_η^μ.

В [2] для $f \in H_+^*(r^{\rho(r)})$ знайдено асимптотичні формули її логарифмічної похідної $F(z) = zf'(z)/f(z)$, а саме

$$F(re^{i\varphi}) = g(\varphi)r^{\rho(r)} + o(r^{\rho(r)}), \quad r \to +\infty, \quad re^{i\varphi} \notin E, \quad E \in C_0^2, \tag{1}$$

де $g \in L_1[0, 2\pi]$. За результатами роботи [3] бачимо, що з асимптотики (1) випливає ц. р. зр. цілої функції f.

Асимптотику логарифмічної похідної цілої функції нульового порядку, нулі якої мають кутову щільність відносно функції $r^{\lambda(r)}$, знайдено в [4]. Тут $\lambda(r)$ — нульовий уточнений порядок лічильної функції $n(r) = n(r, 0, 2\pi)$ нулів f, тобто:

1) $\lambda(r)$ — невід'ємна, неперервно диференційовна на $[0, +\infty)$ функція;

2) $\lambda(r) \to 0$ при $r \to +\infty$;

УДК 517.53
2010 *Mathematics Subject Classification:* 30D20.

3) $r\lambda'(r)\ln r + \lambda(r) \to 0$ при $r \to +\infty$;

4) $r^{\lambda(r)} \nearrow +\infty$ при $r \to +\infty$;

5) $0 < \overline{\lim\limits_{r\to+\infty}}\, n(r)/r^{\lambda(r)} < +\infty$.

В роботі буде знайдена асимптотика логарифмічної похідної для цілої функції нульового порядку, нулі якої мають кутову щільність відносно функції $v(r)$.

1 Формулювання результатів

Нехай L — клас додатних, неспадних, необмежених, неперервно диференційовних на $\mathbb{R}_+$ функцій v таких, що $rv'(r)/v(r) \to 0$ при $r \to +\infty$. Легко переконатися, що $r^{\lambda(r)} \in L$. Позначимо через $H_0(v)$, $v \in L$, клас цілих функцій f нульового порядку, для яких $0 < \overline{\lim\limits_{r\to+\infty}}\, n(r)/v(r) < +\infty$. Нехай $n(r,\alpha,\beta)$ — кількість нулів цілої функції в секторі $\{z\colon |z| \le r, \alpha \le arg\ z < \beta\}, 0 \le \alpha < \beta < 2\pi$. Будемо говорити, що нулі функції $f \in H_0(v)$ мають v-щільність (кутову v-щільність), якщо існує границя

$$\Delta\colon = \lim_{r\to+\infty} \frac{n(r)}{v(r)} \qquad \left(\Delta(\alpha,\beta)\colon = \lim_{r\to+\infty} \frac{n(r,\alpha,\beta)}{v(r)}\right)$$

для всіх α і β, що не належать деякій не більш ніж зліченній множині з $[0,2\pi], 0 < \Delta < +\infty$. Через $H_0^*(v)$ позначимо підклас функцій $f \in H_0(v)$, нулі яких мають кутову v- щільність.

Теорема 1. *Нехай $v \in L$, $f_1, f_2 \in H_0(v)$, послідовності нулів $(a_{1,k})$, $(a_{2,k})$ відповідно функцій f_1, f_2 мають v-щільність, $|a_{1,k}| = |a_{2,k}|$, $|arg\ a_{1,k} - arg\ a_{2,k}| < \delta$. Тоді для будь-яких $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, $1 < \mu \le 2$ існують $\delta > 0$ і така множина E, $D_\mu(E) < \eta$, що*

$$|F_1(z) - F_2(z)| < \varepsilon v(r), \quad z \notin E. \tag{2}$$

Теорема 2. *Нехай $v \in L$, $f \in H_0^*(v)$. Тоді існує така множина $E \in C_0^\mu$, $1 < \mu \le 2$, що*

$$F(re^{i\varphi}) = n(r) + o(v(r)), \quad r \to +\infty, \quad re^{i\varphi} \notin E. \tag{3}$$

2 Доведення основних результатів

При доведенні теореми 1 будемо використовувати такий аналог леми Картана.

Лема ([5]). *Якщо $b_j \in \mathbb{C}$, $1 \le j \le n$, $1 < \mu \le 2$, $H > 0$, то зовні деякої системи не більше ніж n кругів з радіусами r_k таких, що $\sum_k r_k^\mu \le (2H)^\mu$ і кожний круг містить хоча б одну точку b_j, виконується нерівність*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|z - b_j|} \le \frac{\mu}{\mu - 1}\frac{n}{H}.$$

Доведення теореми 1. Нехай $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, $1 < \mu \le 2$ задані довільні числа, $n(r) = n(r,0,f_1) = n(r,0,f_2) = \Delta v(r) + o(v(r))$, $r \to +\infty$,

$$\xi(r) = \sup_{t\ge r} \frac{v(2r) - v(r/2)}{v(r)}.$$

Очевидно, що $\xi(r) \searrow 0$ при $r \to +\infty$. Виберемо $\delta > 0$, $r_0 > 0$ так, щоб $4\delta\Delta < \varepsilon/3$, $16\mu/(\mu-1)\Delta\left(\xi(r)\right)^{1/(2\mu)} < \varepsilon/6$, $64^\mu\sqrt{\xi(r/4)} < \eta$, $r \ge r_0$. Легко бачити, що

$$\begin{aligned} F_j(z) &= z\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{z - a_{j,k}} = z\sum_{|a_{j,k}|<r/2} \frac{1}{z - a_{j,k}} + z\sum_{|a_{j,k}|>2r} \frac{1}{z - a_{j,k}} + z\sum_{r/2\le|a_{j,k}|\le 2r} \frac{1}{z - a_{j,k}} \\ &= F_j^{(1)}\left(z, \frac{r}{2}\right) + F_j^{(2)}(z, 2r) + F_j^{(3)}\left(z, \frac{r}{2}, 2r\right), \qquad |z| = r,\ j = 1,2. \end{aligned} \tag{4}$$

Оцінимо спочатку $|F_j^{(1)}(z,r/2)|$ і $|F_j^{(2)}(z,2r)|$. При $|a_{j,k}| < r/2$, $|arg\ a_{1,k} - arg\ a_{2,k}| < \delta$ маємо $|a_{1,k} - a_{2,k}| < \delta r/2$. Тому

$$\left|F_1^{(1)}\left(z,\frac{r}{2}\right) - F_2^{(1)}\left(z,\frac{r}{2}\right)\right| \le r\sum_{|a_{j,k}|<r/2} \frac{|a_{1,k} - a_{2,k}|}{(r - |a_{1,k}|)(r - |a_{2,k}|)} < 2\delta n\left(\frac{r}{2}\right) < 4\delta\Delta v(r) < \frac{\varepsilon}{3}v(r). \tag{5}$$

При $|a_{j,k}| > 2r$ маємо

$$\begin{aligned} \left|F_1^{(2)}(z,2r) - F_2^{(2)}(z,2r)\right| &\le r\sum_{|a_{j,k}|>2r} \frac{|a_{1,k} - a_{2,k}|}{(|a_{1,k}| - r)(|a_{2,k}| - r)} \le r\int_{2r}^{+\infty} \frac{t\delta/2}{(t-r)^2}dn(t) \\ &= \frac{\delta r}{2}\int_{2r}^{+\infty} \frac{dn(t)}{t(1 - r/t)^2} \le 2\delta r\int_{2r}^{+\infty} \frac{dn(t)}{t} = -\delta n(2r) + 2\delta r\int_{2r}^{+\infty} \frac{n(t)}{t^2}dt \\ &< 3\delta\Delta r\int_{2r}^{+\infty} \frac{v(t)}{t^2}dt \le 3\delta\Delta r\frac{v(2r)}{\sqrt{2r}}\int_{2r}^{+\infty} t^{-3/2}dt = 3\delta\Delta v(2r) \le 4\delta\Delta v(r) < \frac{\varepsilon}{3}v(r), \end{aligned} \tag{6}$$

оскільки $v(r)/\sqrt{r} \searrow 0$ при $r \to +\infty$.

Нехай (a_k) послідовність, яка містить всі члени послідовностей $(a_{1,k})$ і $(a_{2,k})$, а, отже, її лічильною функцією буде $2n(r)$. Маємо

$$\begin{aligned} \left|F_1^{(3)}\left(z,\frac{r}{2},2r\right) - F_2^{(3)}\left(z,\frac{r}{2},2r\right)\right| &\le \left|F_1^{(3)}\left(z,\frac{r}{2},2r\right)\right| + \left|F_2^{(3)}\left(z,\frac{r}{2},2r\right)\right| \\ &\le r\sum_{r/2\le|a_k|\le 2r} \frac{1}{|z - a_k|} = r\psi(z,r). \end{aligned} \tag{7}$$

Для оцінки $\psi(z,r)$ скористаємося лемою. Нехай $R_j = 2^{2j}$, $j = 0,1,2,\ldots$,

$$K_j = \{z\colon R_j/2 < |z| < 2R_j\}, \quad n_j = 2n(2R_j) - 2n(R_j/2), \quad H_j = R_j\xi^{1/(2\mu)}(r/4).$$

Очевидно, що $\{z\colon 1 < |z| < +\infty\} = \bigcup_{j=0}^{+\infty} K_j$. Оскільки $n_j \le 2\Delta(v(2R_j) - v(R_j/2)) \le 4\Delta\xi(R_j)v(R_j)$, то зовні деякої системи кругів $C_{j\nu} = \{z\colon |z - z_{j\nu}| < r_{j\nu}\}$, $1 \le \nu \le s_j$, $\sum_{\nu=1}^{s_j} r_{j\nu}^\mu \le (4H_j)^\mu = (4R_j)^\mu\xi^{1/2}(r/4)$ правильна оцінка

$$\psi(z,R_j) \le \frac{\mu}{\mu-1}\frac{n_j}{H_j} \le \frac{\mu}{\mu-1}\frac{4\Delta\xi(R_j)v(R_j)}{\xi^{1/2\mu}(r/4)R_j} \le \frac{\mu}{\mu-1}\frac{4\Delta v(R_j)}{R_j}\xi^{1-1/(2\mu)}(R_j).$$

Приймемо $E = \left(\bigcup_{j=0}^{+\infty}\bigcup_{\nu=1}^{s_j} C_{j\nu}\right) \bigcup \{z\colon |z| < r_0\}$. Тоді для $r \ge r_0$

$$\sum_{j=0}^{m+1}\sum_{\nu=1}^{s_j} r_{j\nu}^\mu \le \sum_{j=0}^{m+1}\left(4\xi^{1/(2\mu)}\left(\frac{r}{4}\right)R_j\right)^\mu = 4^\mu\xi^{1/2}\left(\frac{r}{4}\right)\frac{R_{m+1}^\mu 2^{2\mu} - 1}{2^{2\mu} - 1} < \frac{64^\mu}{3}\xi^{1/2}\left(\frac{r}{4}\right)r^\mu < \frac{\eta}{3}r^\mu,$$

а, отже, $D_\mu(E) < \eta$.

Нехай $R_m \le r < R_{m+1}$. Тоді $R_{m+1}/4 \le r \le 4R_m$ і для $r \ge r_0$

$$\psi(z, R_m) \le \frac{\mu}{\mu-1}\frac{4\Delta v(R_m)}{R_m}\xi^{1-1/(2\mu)}(R_m) < \frac{\mu}{\mu-1}\frac{16\Delta v(r)}{r}\xi^{1-1/(2\mu)}\left(\frac{r}{4}\right) < \frac{\varepsilon}{6}\frac{v(r)}{r} \tag{8}$$

і, аналогічно,

$$\psi(z, R_{m+1}) \le \frac{\mu}{\mu-1}\frac{4\Delta v(R_{m+1})}{R_{m+1}}\xi^{1-1/(2\mu)}(R_{m+1}) < \frac{\varepsilon}{6}\frac{v(r)}{r}. \tag{9}$$

Враховуючи, що $\psi(z,r) \le \psi(z,R_m) + \psi(z,R_{m+1})$, з (7), (8) та (9) маємо

$$\left|F_1^{(3)}\left(z, \frac{r}{2}, 2r\right)\right| + \left|F_2^{(3)}\left(z, \frac{r}{2}, 2r\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}v(r), \quad z \notin E. \tag{10}$$

Взявши до уваги (4)–(6), (10) отримуємо (2), що доводить теорему 1. □

Доведення теореми 2. У випадку, коли всі нулі f розташовані на скінченній системі променів $\Gamma_m = \bigcup_{j=1}^{m}\{z\colon arg\, z = \psi_j\}$, доведення теореми аналогічне до доведення теореми 2 з [4]. Ми отримуємо

$$F(re^{i\varphi}) = n(r) + o(v(r)), \quad r \to +\infty, \quad z \notin \Gamma_m, \tag{11}$$

причому (11) виконується рівномірно щодо $\varphi \in [0,2\pi]\setminus\bigcup_{j=1}^{m}\{z\colon |arg\, z - \psi_j| \ge \gamma\}$, де $\gamma > 0$ як завгодно мале число. Перехід до загального випадку здійснюємо використовуючи теорему 1.

Зафіксуємо $\varepsilon = \varepsilon_n = 1/n, \eta = \eta_n = 2^{-(n+1)}$. За теоремою 1 існують $\delta > 0$, система таких променів $(\psi_j)_{j=0}^{m}$, $0 = \psi_0 < \psi_1 < \dots \psi_m = 2\pi$, що $|\psi_{j+1} - \psi_j| < \delta$, $j = \overline{0, m-1}$, ціла функція $F_{1,n}(z) = z\sum_{k=1}^{+\infty} 1/(z - a_k')$ з полюсами a_k', $|a_k'| = |a_k|$ і, якщо $\psi_j \le arg\, a_k < \psi_{j+1}$, $arg\, a_k' = \psi_j$. Для $z = re^{i\varphi}$, $r \ge r_n$, $\varphi \in [0,2\pi]$, $|\varphi - \psi_j| \ge \gamma$, де $\gamma > 0$ достатньо мале число, з асимптотичної формули (11) отримуємо, що

$$|F_{1,n}(z) - n(r)| < \frac{\varepsilon_n}{4}v(r).$$

Крім того, за теоремою 1 існує така система кругів C_n', $D_\mu(C_n') < \eta_n/4$, зовні якої

$$|F(z) - F_{1,n}(z)| < \frac{\varepsilon_n}{4}v(r).$$

Тому отримуємо, що

$$|F(z) - n(r)| < \frac{\varepsilon_n}{2}v(r), \tag{12}$$

для $r \ge r_n$, $\varphi \in [0,2\pi]$, $|\varphi - \psi_j'| \ge \gamma$, $0 \le j \le m-1$, $z \notin C_n'$.

Будуємо $F_{2,n}$ з полюсами, що лежать на системі променів $\left(\psi_j'\right)$, $0 = \psi_0' < \psi_1' < \dots \psi_m' = 2\pi$, такими, що

$$\left(\bigcup_{j=1}^{s-1}\{\varphi\colon |\varphi - \psi_j'| < \gamma\}\right) \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^{m-1}\{\varphi\colon |\varphi - \psi_j| < \gamma\}\right) = \varnothing.$$

Тоді як і в попередньому випадку, існує система кругів C_n'', $D_\mu(C_n'') < \eta_n/4$, зовні якої виконується (12) для $r \ge r_n$, $\varphi \in [0,2\pi]$, $|\varphi - \psi_j'| \ge \gamma$, $0 \le j \le s-1$. А, отже, (12) виконується для всіх $\varphi \in [0,2\pi]$, $r \ge r_n$, $z \notin C_n = C_n' \bigcup C_n''$, $D_\mu(C_n) < \eta_n/2$.

Нехай

$$C_n = \bigcup_{j=1}^{+\infty} C_{nj}, \; C_{nj} = \{z\colon |z - z_{nj}| < r_{nj}\}.$$

При всіх достатньо великих r

$$\sum_{|z_{nj}| \le r} r_{nj}^{\mu} < r^{\mu}\eta_n/2 \le r^{\mu}/8.$$

Тоді для достатньо великих j маємо $r_{nj}^{\mu} < |z_{nj}|^{\mu}/4$ і $r_{nj} < |z_{nj}|/2$. Виберемо таку послідовність $(R_k)_1^{+\infty}$, що $R_{k+1} > (k+1)R_k, k = 1, 2, \dots$, для $r \ge R_n$, $z \notin C_n$ виконується (12), і позначимо

$$E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \; \bigcup_{R_n \le |z_{nj}| < R_{n+3}} \{z\colon |z - z_{nj}| < r_{nj}\} = \bigcup_{s=1}^{+\infty}\{z\colon |z - z_s| < r_s\}.$$

Далі, аналогічно як в [3], показуємо, що $D_\mu(E) = 0$ і виконується (3) рівномірно по $\varphi \in [0, 2\pi)$, що й доводить теорему 2. □

REFERENCES

[1] Levin B. Ja. Distribution of zeros of entire functions. Hos.-Tehn. Publ., Moscow, 1956. (in Russian)

[2] Goldberg A. A., Korenkov N. E. *Asymptotics of the logarithmic derivative of an entire function of completely regular growth.* Sibirsk. Mat. Zh. 1980, **21** (3), 63–79. (in Russian)

[3] Goldberg A. A., Strochyk N. N. *Asymptotic behavior of meromorphic functions of completely regular growth and their logarithmic derivatives.* Sibirsk. Mat. Zh. 1985, **26** (6), 29–38. (in Russian)

[4] Zabolotskyj M. V. *Asymptotics of the logarithmic derivative for an entire function of order zero.* Ukrain. Mat. Zh. 1999, **51** (1), 32–40. (in Ukrainian)

[5] Macintyre A. J., Fuchs W. H. J. *Inequalities for the logarithmic derivatives of a polynomial.* J. Lond. Math. Soc. 1940. **15**, 162–168.

Надійшло 04.04.2014

Zabolotskyj M.V., Mostova M.R. *Asymptotic behavior of the logarithmic derivative of entire functions of zero order.* Carpathian Math. Publ. 2014, 6 (2), 237–241.

We get an approximation theorem for the logarithmic derivative F of entire functions of zero order and with it's help establish the asymptotic of F outside of the exceptional set.

Key words and phrases: entire function, logarithmic derivative, zero order, density, asymptotics.

Заболоцкий Н.В., Мостовая М.Р. *Асимптотическое поведение логарифмической производной целых функций нулевого порядка* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 237–241.

Получена аппроксимационная теорема для логарифмической производной F целых функций нулевого порядка и с ее помощью найдено асимптотику F снаружи исключительного множества.

Ключевые слова и фразы: целая функция, логарифмическая производная, нулевой порядок, плотность, асимптотика.

ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 242–255
doi:10.15330/cmp.6.2.242-255

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.242–255

Ільків В.С., Страп Н.І.

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОПЕРАТОРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ У БАГАТОВИМІРНІЙ КОМПЛЕКСНІЙ ОБЛАСТІ

Досліджено нелокальну крайову задачу для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними з оператором $B = (B_1, \dots, B_p)$, де $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1, \dots, p$, — оператори узагальненого диференціювання за комплексною змінною z_j. Задача є некоректною за Адамаром, а її розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку задачі, а також встановлено умови існування та єдиності цього розв'язку у шкалі просторів функцій багатьох комплексних змінних.

Ключові слова і фрази: рівняння з частинними похідними, оператор узагальненого диференціювання, псевдо-диференціальний оператор, малі знаменники, метрична оцінка.

Lviv Polytechnic National University, 12 Bandera str., 79013, Lviv, Ukraine
E-mail: ilkivv@i.ua (Ільків В.С.), n.strap@mail.ru (Страп Н.І.)

Вступ

Дослідження нелокальних крайових задач для різних типів диференціальних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними та встановлення умов коректної їхньої розв'язності є одним із важливих напрямів розвитку сучасної теорії рівнянь з частинними похідними [8, 13, 14]. Ці задачі пов'язують значення шуканих розв'язків та їх похідних у різних межових чи внутрішніх точках розглядуваної області. У загальному випадку такі задачі є некоректними за Адамаром [10, 11], а їх розв'язність залежить від малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку.

Багато дослідників (див. [1, 5, 7]) коректність таких задач забезпечують накладанням додаткових обмежень на коефіцієнти рівняння, крайові умови та області, в яких вивчаються задачі. Нелокальні задачі для гіперболічних, параболічних і безтипних рівнянь з частинними похідними за допомогою метричного підходу до оцінки малих знаменників розглядалися у дійсній області, наприклад, у роботах [2, 3, 10], а задача Коші для системи двох анізотропних рівнянь з частинними похідними і сталими коефіцієнтами — у праці [6]. Особливістю цієї роботи є дослідження нелокальної задачі для системи диференціально-операторних рівнянь з оператором диференціювання $B = (B_1, \dots, B_p)$, де $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1, \dots, p$, що діє на функції просторових комплексних змінних $(z_1, \dots, z_p)$.

УДК 517.946+511.37
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35G15, 35E05.

У роботі [4] розглянуто таку задачу для одного диференціально-операторного рівняння з оператором B і сталими коефіцієнтами. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі у відповідному функціональному просторі та доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку задачі.

1 Постановка задачі

Нехай $\mathcal{S}$ — однозв'язна область проколотої у нулі комплексної площини, а $\mathcal{D}^p$ — циліндрична область $[0, T] \times \mathcal{S}^p$, де $T > 0$, $p \geq 2$. Введемо $\mathbf{W}$ — лінійний простір кратних скінченних сум (основних функцій) вигляду $P(z) = \sum\limits_k P_k z^k = \sum\limits_{k_1} \dots \sum\limits_{k_p} P_{k_1,\dots,k_p} z_1^{k_1} \dots z_p^{k_p}$, де $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathcal{S}^p$, $P_k \in \mathbb{C}$, $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$.

Простір $\mathbf{W}'$ спряжений до простору $\mathbf{W}$; це простір узагальнених функцій (лінійних неперервних функціоналів), які є формальними рядами Лорана $Q(z) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} Q_k z^k$, що діють на основну функцію $P \in \mathbf{W}$ за правилом $\langle Q, P \rangle = \sum\limits_k Q_k \overline{P}_k$.

Введемо шкали просторів $\{\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)\}_{q \in \mathbb{R}}$, $\{\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)\}_{q \in \mathbb{R}}$, $\{\bar{\mathbf{H}}_q(\mathcal{S}^p)\}_{q \in \mathbb{R}}$ і $\{\bar{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)\}_{q \in \mathbb{R}}$ наступним чином. Нехай $\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)$, $q \in \mathbb{R}$, — гільбертів простір функцій $\psi = \psi(z) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} \psi_k z^k$, де $z \in \mathcal{S}^p$, $z^k = z_1^{k_1} \dots z_p^{k_p}$, із заданим скалярним добутком $(\psi, \varphi)_{\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)} = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{2q} \psi_k \overline{\varphi}_k$, де $\widetilde{k} = \sqrt{1 + k_1^2 + \dots + k_p^2}$, і нехай $\|\psi\|^2_{\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)} = (\psi, \psi)_{\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)}$; а $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)$, $q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, — банахів простір функцій $u = u(t, z)$ таких, що похідні $\dfrac{\partial^r u(t,z)}{\partial t^r} = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k^{(r)}(t) z^k$, $r = 0, 1, \dots, n$, для кожного $t \in [0, T]$ належать до просторів $\mathbf{H}_{q-r}(\mathcal{S}^p)$ відповідно і неперервні за змінною t у цих просторах. Квадрат норми у просторі $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)$ визначає формула

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)} = \sum_{r=0}^{n} \max_{[0,T]} \left\| \frac{\partial^r u(t, \cdot)}{\partial t^r} \right\|^2_{\mathbf{H}_{q-r}(\mathcal{S}^p)};$$

$\bar{\mathbf{H}}_q(\mathcal{S}^p)$ — простір вектор-функцій $v = v(z) = \mathrm{col}\,(v_1(z), \dots, v_m(z))$, де $v_j = v_j(z) \in \mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)$, $j = 1, \dots, m$, квадрат норми яких задається формулою $\|v\|^2_{\bar{\mathbf{H}}_q(\mathcal{S}^p)} = \sum\limits_{j=1}^{m} \|v_j\|^2_{\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)}$, а $\bar{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)$ — простір функцій $u = u(t, z) = \mathrm{col}\,(u_1(t, z), \dots, u_m(t, z))$, де $u_j = u_j(t, z) \in \mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)$, $j = 1, \dots, m$, з квадратом норми $\|u\|^2_{\bar{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)} = \sum\limits_{j=1}^{m} \|u_j\|^2_{\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)}$.

Розглянемо систему рівнянь з частинними похідними і сталими коефіцієнтами

$$\sum_{s_0 + |s| \leq n} A_{s_0, s} B^s \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = 0, \tag{1}$$

де $s = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \dots + s_p$, $A_{s_0,s}$ — квадратні матриці порядку m, $A_{n,0,\dots,0} = I_m$ — одинична матриця; $u = u(t, z) = \mathrm{col}\,(u_1(t, z), \dots, u_m(t, z))$ — вектор розміру m, де $n, m \geq 1$. Оператор $B = (B_1, \dots, B_p)$ складено з операторів узагальненого диференціювання $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, зокрема $B_j(z^k) = k_j z^k$. Степенями цих операторів є $B_j^0 u \equiv u$, $B_j^l u = B_j(B_j^{l-1} u)$, $j = 1, \dots, p$, $l = 1, \dots, n$. У формулі (1) позначено $B^s = B_1^{s_1} \dots B_p^{s_p}$.

Введемо також функцію $\zeta(z) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \tilde{k}^{-z}$, яка існує у півплощині $\mathrm{Re}\, z > p$, та позначимо $\mathcal{O}_R$ — круг радіуса R з центром у початку координат комплексної площини $\mathbb{C}$.

Шукаємо розв'язок $u \in \tilde{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)$ системи (1), що задовольняє нелокальні умови

$$\mu \frac{\partial^j u}{\partial t^j}\bigg|_{t=0} - \frac{\partial^j u}{\partial t^j}\bigg|_{t=T} = \varphi_j, \qquad j = 0, 1, \dots, n-1, \tag{2}$$

де $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\varphi_j = \varphi_j(z) = \mathrm{col}\,(\varphi_{j1}(z), \dots, \varphi_{jm}(z))$ — задані вектор-функції розміру m зі шкали просторів $\{\tilde{\mathbf{H}}_q(\mathcal{S}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$.

Означення. *Під розв'язком задачі* (1), (2) *будемо розуміти таку вектор-функцію* $u = u(t,z) = \mathrm{col}\,(u_1(t,z), \dots, u_m(t,z))$, *складену з функцій* $u_i(t,z)$, $i = 1, \dots, m$, *із значеннями* $u_i(t,\cdot)$ *у просторі* $\mathbf{W}'$ *для* $t \in [0,T]$, *яка задовольняє рівняння* (1), *умови* (2) *та належить до простору* $\tilde{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)$.

2 Побудова формального розв'язку. Теорема єдиності

Введемо псевдодиференціальні оператори. Для цього розглянемо довільну послідовність комплексних чисел $F(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Вона породжує псевдодиференціальний оператор $F(B) = F(B_1, \dots, B_p) = F\Big(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, z_p\frac{\partial}{\partial z_p}\Big)$, що діє на $\varphi(z) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\psi(k)z^k$ за формулою

$$F(B)\varphi(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} F(k)\psi(k)z^k.$$

Коефіцієнти $\psi(k)$ розвинення $\varphi(z)$ у ряд Фур'є породжують оператор $\psi(B)$, а тому кожній функції з $\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)$ відповідає псевдодиференціальний оператор $\psi(B)$. При цьому $\varphi(z) = \psi(B)\delta(z)$, де $\delta(z) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} z^k$. Аналогічно, послідовність функцій $F(t,k)$, $t \in [0,T]$, породжує оператор $F(t,B)$, функція $v(t,z) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} V(t,k)z^k$ з простору $\tilde{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)$ — оператор-функцію $V(t,B)$. При цьому $v(t,z) = V(t,B)\delta(z)$.

Задача (1), (2) еквівалентна задачі з нелокальними умовами для системи рівнянь з частинними похідними першого порядку за часовою змінною

$$\frac{\partial v(t,z)}{\partial t} = L(B)v(t,z), \qquad \mu\, v(0,z) - v(T,z) = \varphi(z), \tag{3}$$

де

$$v(t,z) = \mathrm{col}\,\Big(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{n-1}u}{\partial t^{n-1}}\Big) = \mathrm{col}\,(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}),$$

$$L(B) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_{(n-1)m} \\ \hline -L_n(B) & -L_{n-1}(B) \ \dots\ -L_1(B) \end{array}\right),$$

$$L_r(B) = \sum_{|s|\le r} A_{n-r,s}B^s, \qquad L_r(B) = (L_r^{ij}(B))_{i,j=1,\dots,m}, \qquad r = 1, \dots, n,$$

$$\varphi(z) = \mathrm{col}\,(\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots, \varphi_{n-1}(z)).$$

Оскільки

$$v(t,z) \equiv V(t,B)\delta(z) \equiv \mathrm{col}\,(V_0(B), V_1(B), \dots, V_{n-1}(B))\delta(z),$$
$$\varphi(z) \equiv \psi(B)\delta(z) \equiv \mathrm{col}\,(\psi_0(B), \psi_1(B), \dots, \psi_{n-1}(B))\delta(z),$$

то задача (3) еквівалентна множині нелокальних крайових задач на проміжку $[0,T]$ для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{dV(t,k)}{dt} = L(k)V(t,k), \qquad \mu V(0,k) - V(T,k) = \psi(k), \qquad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{4}$$

Нехай $Z = \mathrm{diag}(\tilde{k}^n I_m, \dots, \tilde{k}^2 I_m, \tilde{k} I_m)$, $ZV(t,k) = \tilde{V}(t,k)$ і $Z\psi(k) = \tilde{\psi}(k)$. Тоді задачу (4) запишемо наступним чином

$$\frac{d\tilde{V}(t,k)}{dt} = \tilde{k}\tilde{L}(k)\tilde{V}(t,k), \qquad \mu\tilde{V}(0,k) - \tilde{V}(T,k) = \tilde{\psi}(k), \qquad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{5}$$

де

$$\tilde{L}(k) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_{(n-1)m} \\ \hline -\tilde{L}_n(k) & -\tilde{L}_{n-1}(k) \ \dots\ -\tilde{L}_1(k) \end{array}\right), \qquad \tilde{L}_j(k) = \tilde{k}^{-j}L_j(k) = \sum_{|s|\le j} A_{n-j,s}\Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^s \tilde{k}^{|s|-j}.$$

Якщо числа $\lambda_j(k)$, $j = 1, \dots, nm$, є коренями характеристичного рівняння

$$f(\lambda,k) = \det\big(\lambda I_{nm} - \tilde{L}(k)\big) = \det\Big(\lambda^{mn}I_{nm} + \sum_{j=1}^{mn}\lambda^{mn-j}\tilde{L}_j(k)\Big) = 0,$$

то $\gamma_j(k) = \tilde{k}\lambda_j(k)$ є коренями рівняння $\det\big(\gamma I_{nm} - L(k)\big) = 0$.

Визначник $f(\lambda,k)$ можемо записати у вигляді

$$f(\lambda,k) = \sum_{j=0}^{mn} f_j(k)\lambda^{mn-j} = \lambda^{mn} + \ldots + (-1)^{mn}\det\tilde{L}(k) = 0.$$

З оцінки Коші [12] для коренів многочлена $|\lambda_j(k)| \le 1 + \max\{|f_1(k)|, \dots, |f_{mn}(k)|\}$ випливає, що вони є рівномірно обмеженими за k разом із коефіцієнтами $f_1(k), \dots, f_{mn}(k)$ многочлена $f(\lambda,k)$. Загальний розв'язок рівняння (5) запишемо у вигляді

$$\tilde{V}(t,k) = e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)t}C(k), \tag{6}$$

де $C(k)$ — довільний вектор зі сталих. Для знаходження $C(k)$ підставимо $\tilde{V}(t,k)$ в крайові умови задачі (5) і отримаємо систему $(\mu I_{nm} - e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)T})C(k) = \tilde{\psi}(k)$. Якщо матриця $(\mu I_{nm} - e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)T})$ невироджена, то невідомі $C(k)$ знаходимо за формулою $C(k) = (\mu I_{nm} - e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)T})^{-1}\tilde{\psi}(k)$. Тоді розв'язок задачі (5) матиме вигляд

$$\tilde{V}(t,k) = e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)t}(\mu I_{nm} - e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)T})^{-1}\tilde{\psi}(k). \tag{7}$$

Оскільки визначник матриці дорівнює добутку її власних значень, а власними значеннями матриці $(\mu I_{nm} - e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)T})$ є числа $\mu - e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T}$, то

$$\det(\mu I_{nm} - e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)T}) = \prod_{j=1}^{nm}(\mu - e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T}). \tag{8}$$

Сформулюємо і доведемо теорему єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\tilde{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $\tilde{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)$ *необхідно і достатньо, щоб рівняння*

$$\det\Big(\frac{\ln\mu - 2\pi m_1 i}{\tilde{k}T}I_{nm} - \tilde{L}(k)\Big) = 0, \tag{9}$$

не мало розв'язків у цілих числах m_1 *і* $k_1, \dots, k_p$.

Доведення. Необхідність. Нехай розв'язок задачі (1), (2) єдиний. Тоді задача (5) має єдиний розв'язок для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, що зображається у вигляді (7). Отже, матриця $(\mu I_{nm} - e^{\tilde{k}L(k)T})$ є невиродженою. Таким чином, враховуючи (8), $\mu \neq e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T}$. Логарифмуючи, отримаємо, що рівняння (9) не має розв'язків у цілих числах m_1 і $k_1, \dots, k_p$.

Достатність. Доведемо від супротивного. Нехай числа m_1^* і $k_1^*, \dots, k_p^*$ є розв'язком рівняння (9). Тоді, вважаючи $\lambda_1(k^*) = \dfrac{\ln \mu - i2\pi m_1^*}{\tilde{k}^* T}$, де $k^* = (k_1^*, \dots, k_p^*)$, однорідна задача (5) має безліч розв'язків $\tilde{V}(t, k^*)$, що утворюють підпростір та визначаються (6), у якій вектор $C(k)$ є загальним розв'язком виродженої однорідної системи лінійних алгебричних рівнянь $(\mu I_{nm} - e^{\tilde{k}L(k)T})C(k) = 0$. Отже, розв'язок задачі (1), (2) не є єдиним. □

3 Оцінювання розв'язку. Теорема існування

Для встановлення умов існування та побудови розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\tilde{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)$ припустимо, що корені $\lambda_1(k), \dots, \lambda_{mn}(k)$ є різними для фіксованого $k \in \mathbb{Z}^p$. Позначимо $R(k) = (\tilde{\psi}(k), \tilde{L}(k)\tilde{\psi}(k), \dots, \tilde{L}^{nm-1}(k)\tilde{\psi}(k))$, $\rho(t,k) = \operatorname{col}(\rho(t,\lambda_1), \dots, \rho(t,\lambda_{nm}))$,

$$W(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{nm} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_{nm}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_{nm}^{n-1} \end{pmatrix},$$

де $W(k)$ — матриця Вандермонда, побудована за коренями $\lambda_1, \dots, \lambda_{nm}$, а $\rho(t,k)$ — вектор значень функцій $\rho(t,\lambda) = \dfrac{e^{\tilde{k}\lambda t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda T}}$ на коренях $\lambda_1, \dots, \lambda_{nm}$.

Тоді розв'язок (7) задачі (5) записується у вигляді [11]

$$\tilde{V}(t,k) = R(k)W^{-T}(k)\rho(t,\lambda),$$

де $W^{-T}(k) = \left(W^{-1}(k)\right)^T = \left(W^T(k)\right)^{-1}$ — матриця обернена до транспонованої матриці Вандермонда. Для обчислення матриці $W^{-T}(k)$ використовуємо формулу

$$W^{-T}(k) = \left(f_{mn+1-i-j}(k)\right)_{i,j=1}^{mn} W(k)\left(\operatorname{diag}\left(f'(\lambda_j(k),k)\right)_{j=1}^{mn}\right)^{-1},$$

де $f_j(k) = 0$ при $j < 0$, $f'(\lambda,k) = \dfrac{\partial f(\lambda,k)}{\partial \lambda}$. Перетворимо вирази $\left(f'(\lambda_j(k),k)\right)^{-2}$ до дробів [9] $\dfrac{1}{\operatorname{Res}(f,f')} \prod\limits_{\substack{1 \le \alpha < \beta \le mn \\ \alpha,\beta \neq j}} (\lambda_\alpha(k) - \lambda_\beta(k))^2$, де $\operatorname{Res}(f,f') = \prod\limits_{j=1}^{mn} f'(\lambda_j(k),k)$ — результант многочленів f та f' і $\operatorname{Res}(f,f') = \det S(f)$, де $S(f)$ — матриця Сильвестра многочлена $f = f(\lambda,k)$, яка є блочною матрицею і складається з двох матриць з $mn-1$ і mn рядками відповідно,

$$S(f) = \begin{pmatrix} \left(f_{j-i}(k)\right)_{i,j=1}^{mn-1,\,2mn-1} \\ \left((mn-j+i)f_{j-i}(k)\right)_{i,j=1}^{mn,\,2mn-1} \end{pmatrix}.$$

Встановимо умови існування розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\tilde{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)$. Оскільки

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = -L_n(B)u - L_{n-1}(B)\frac{\partial u}{\partial t} - \dots - L_1(B)\frac{\partial^{n-1}u}{\partial t^{n-1}},$$

то

$$\left\|\frac{\partial^n u}{\partial t^n}\right\|_{\tilde{\mathbf{H}}_{q-n}(\mathcal{S}^p)} \le C_1\left(\|u\|^2_{\tilde{\mathbf{H}}_q(\mathcal{S}^p)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{\tilde{\mathbf{H}}_{q-1}(\mathcal{S}^p)} + \dots + \left\|\frac{\partial^{q-n+1}u}{\partial t^{n-1}}\right\|^2_{\tilde{\mathbf{H}}_1(\mathcal{S}^p)}\right),$$

де $C_1 = C_1(n,p,A)$ — деяка стала. Отже,

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{\tilde{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)} &\le (C_1+1)\sum_{j=0}^{n-1}\max_{[0,T]}\left\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right\|_{\tilde{\mathbf{H}}_{q-j}(\mathcal{S}^p)} = (C_1+1)\sum_{j=0}^{n-1}\max_{[0,T]}\|v_j\|_{\tilde{\mathbf{H}}_{q-j}(\mathcal{S}^p)} \\ &= (C_1+1)\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\max_{[0,T]}|\tilde{k}^{q-j}V_j(t,k)|^2 = (C_1+1)\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\max_{[0,T]}|\tilde{k}^{q-n}\tilde{V}_j(t,k)|^2. \end{aligned} \tag{10}$$

Запишемо наступну оцінку

$$\begin{aligned} |\tilde{k}^{q-n}\tilde{V}_j(t,k)|^2 &\le C_2\|\rho(t,k)\|^2\|W^{-T}(k)\|^2\sum_{j=0}^{n-1}|\tilde{k}^{q-n}\tilde{\psi}_j(t,k)|^2 \\ &= C_2\|\rho(t,k)\|^2\|W^{-T}(k)\|^2\sum_{j=0}^{n-1}|\tilde{k}^{q-j}\psi_j(t,k)|^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Сформулюємо та доведемо теорему існування розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\tilde{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 та для деяких додатних сталих C_3 та C_4 і дійсних чисел η_1, η_2 для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконуються нерівності*

$$|\det S(f)| \ge C_3\tilde{k}^{-\eta_1}, \tag{12}$$

$$|\rho(t,\lambda_l(k))| \le C_4\tilde{k}^{\eta_2}, \qquad l = 1,\dots,mn. \tag{13}$$

Якщо $\varphi_j \in \tilde{\mathbf{H}}_{\psi-j}(\mathcal{S}^p)$, де $\psi > q + \eta_1 + \eta_2$, то існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) з простору $\tilde{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)$, який неперервно залежить від правих частин умов (2).

Доведення. Враховуючи оцінки (11)–(13), нерівність (10) запишемо у вигляді

$$\|u\|^2_{\tilde{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)} \le C\sum_{j=0}^{n-1}\|\varphi_j\|^2_{\tilde{\mathbf{H}}_{\psi-j}(\mathcal{S}^p)},$$

де $C>0$ — стала, звідки й випливає твердження теореми. □

Розглянемо умови, за яких виконується нерівність (12). Для отримання оцінок сформулюємо та доведемо наступну лему.

Лема 3.1. *Якщо $f(\lambda) = h(\lambda) + ag(\lambda)$, де $f(\lambda)$, $h(\lambda)$, $g(\lambda)$ — многочлени, а саме $f(\lambda) = f_0\lambda^t + f_1\lambda^{t-1} + \dots + f_t$, $h(\lambda) = h_0\lambda^t + h_1\lambda^{t-1} + \dots + h_t$, $g(\lambda) = g_0\lambda^s + g_1\lambda^{s-1} + \dots + g_s$, де $s < t$, а $S(f)$, $S(h)$, $S(g)$ — матриці Сильвестра цих многочленів, то визначник $\det S(f)$ матриці $S(f)$ є многочленом за змінною a степеня не вище $t+s-1$, причому*

$$\det S(f) = \left((s-t)h_0g_0\right)^{t-s}\det S(g)a^{t+s-1} + \dots + \det S(h).$$

Доведення. За умовою $f_i = h_i + ag_{s-t+i}$ для $i \in \{t-s, t-s+1, \dots, t\}$ і $f_i = h_i$ для $i \in \{0, 1, \dots, t-s-1\}$. Оскільки матриця Сильвестра $S(f)$ многочлена $f(\lambda)$ є блочною

$$S(f) = \begin{pmatrix} (f_{j-i})_{t-1}^{2t-1} \\ ((\omega+t-s)f_{j-i})_t^{2t-1} \end{pmatrix},$$

де i — номер рядка, j — номер стовпця, $(\ )_r^q$ — матриця порядку $r\times q$, $\omega = s-j+i$, то

$$S(f) = \begin{pmatrix} (h_{j-i})_{t-1}^{2t-1} \\ ((\omega+t-s)h_{j-i})_t^{2t-1} \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} (0)_{t-1}^{t-s} & (g_{j-i})_{t-1}^{t+s-1} \\ (0)_t^{t-s} & (\omega g_{j-i})_t^{t+s-1} \end{pmatrix},$$

де $h_j = 0$ для $j < 0$ та $j > t$ і $g_j = 0$ для $j < 0$ та $j > s$. Тоді

$$S(f) = \begin{pmatrix} (h_{j-i})_{t-1}^{2t-1} & (g_{j-i})_{t-1}^{t+s-1} \\ ((\omega+t-s)h_{j-i})_t^{2t-1} & (\omega g_{j-i})_t^{t+s-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_{t-s} & 0 \\ 0 & E_{t+s-1} \\ 0 & aE_{t+s-1} \end{pmatrix}.$$

Використовуючи формулу Біне-Коші, отримаємо многочлен за змінною a, тобто

$$\det S(f) = a^{t+s-1} \det \begin{pmatrix} (h_{j-i})_{t-1}^{t-s} & (g_{j-i})_{t-1}^{t+s-1} \\ ((\omega+t-s)h_{j-i})_t^{t-s} & (\omega g_{j-i})_t^{t+s-1} \end{pmatrix} + \ldots + \det S(h).$$

Коефіцієнт біля a^{t+s-1} запишемо у вигляді

$$\det \begin{pmatrix} S_3 & S_4 & \mathcal{X}_2 \\ 0 & 0 & (g_{j-i})_{s-1}^{2s-1} \\ S_1 & S_2 & \mathcal{X}_1 \\ 0 & 0 & (\omega g_{j-i})_{s-1}^{2s-1} \end{pmatrix} = (-1)^{t-s} \det \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & \mathcal{X}_1 \\ S_3 & S_4 & \mathcal{X}_2 \\ 0 & 0 & (g_{j-i})_{s-1}^{2s-1} \\ 0 & 0 & (\omega g_{j-i})_{s-1}^{2s-1} \end{pmatrix}$$
$$= \det \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} (g_{j-i})_{s-1}^{2s-1} \\ (\omega g_{j-i})_{s-1}^{2s-1} \end{pmatrix},$$

де матриці $S_1 = (\omega+t-s)h_{j-i}$, $S_3 = h_{j-i}$, $S_2 = \omega g_{j-i}$, $S_4 = g_{j-i}$ мають порядок $t-s$, $\mathcal{X}_1$ та $\mathcal{X}_2$ позначають матриці, від яких не залежать відповідні визначники. Підставивши разом із формулою $\det \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix} = \left(det \begin{pmatrix} th_0 & sg_0 \\ h_0 & g_0 \end{pmatrix} \right)^{t-s} = \big(h_0 g_0 (t-s)\big)^{t-s}$ у попередню, отримуємо

$$\det S(f) = (-1)^{t-s}\big((t-s)h_0 g_0\big)^{t-s} a^{t+s-1} \det \begin{pmatrix} (g_{j-i})_{s-1}^{2s-1} \\ (\omega g_{j-i})_s^{2s-1} \end{pmatrix} + \ldots + \det S(h)$$
$$= \big((s-t)h_0 g_0\big)^{t-s} a^{t+s-1} \det S(g) + \ldots + \det S(h).$$

□

Лема 3.2 ([6]). *Нехай многочлен $g(\lambda)$ має вигляд $g(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} g_j \lambda^{n-j}$, тоді*

$$\det S(g) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} (-1)^{\alpha+n\alpha} \alpha^{\alpha} (n-\alpha)^{n-\alpha} g_0^{\alpha} g_n^{n-\alpha-1} g_{\alpha}^{n} + \ldots,$$

де три крапки означають доданки, що не містять n-тих степенів коефіцієнтів g_α.

Позначимо через $b_1, \dots, b_p$ коефіцієнти біля похідних $B_1^n, \dots, B_p^n$ оператора $\tilde{L}_n^{11}(B)$, через $b_{p+1}, \dots, b_{2p}$ — відповідні коефіцієнти оператора $\tilde{L}_n^{22}(B)$ і т.д., через $b_{(m-1)p+1}, \dots, b_{mp}$ — відповідні коефіцієнти оператора $\tilde{L}_n^{mm}(B)$. Нехай $b = (b_1, b_2, \dots, b_{mp})$.

Многочлен $f(\lambda, k)$ можемо записати у вигляді

$$f(\lambda,k) = b_j \Big(\frac{k_j}{\tilde{k}}\Big)^n g_1(\lambda,k) + h_1(\lambda,k), \ \ j = 1, \dots, p,$$

де многочлени $g_1(\lambda,k)$ та $h_1(\lambda,k)$ не залежать від b_j. Многочлен $g_1(\lambda,k)$ також можна розписати у вигляді суми $g_1(\lambda,k) = b_{p+j}\Big(\frac{k_j}{\tilde{k}}\Big)^n g_2(\lambda,k) + h_2(\lambda,k)$, $j = 1, \dots, p$, де многочлени $g_2(\lambda,k)$ та $h_2(\lambda,k)$ не залежать від b_{p+j}. Кожен многочлен $g_i(\lambda,k)$ для $i = 1, \dots, m-2$ можемо записати як $g_i(\lambda,k) = b_{ip+j}\Big(\frac{k_j}{\tilde{k}}\Big)^n g_{i+1}(\lambda,k) + h_{i+1}(\lambda,k)$, $j = 1, \dots, p$, де $g_{i+1}(\lambda,k)$ та $h_{i+1}(\lambda,k)$ не залежать від b_{ip+j}. Застосувавши для кожного з многочленів $f(\lambda,k)$ і $g_i(\lambda,k)$, $i = 1, \dots, m-2$, лему 3.1 при $a = b_j\Big(\frac{k_j}{\tilde{k}}\Big)^n$ у розкладі многочлена $f(\lambda,k)$ і $a = b_{ip+j}\Big(\frac{k_j}{\tilde{k}}\Big)^n$ у розкладі многочленів $g_i(\lambda,k)$ та при $g_{l0} = h_{l0} = 1$, де g_{l0} і h_{l0}, $l = 1, \dots, m-1$, коефіцієнти найстарших членів многочленів $g_l(\lambda,k)$ і $h_l(\lambda,k)$ відповідно, отримуємо

$$\det S\big(f(\lambda,k)\big) = (-1)^n n^n \Big(\frac{k_j}{\tilde{k}}\Big)^{n(2mn-n-1)} (b_j)^{2mn-n-1} \det S(g_1) + \ldots, \tag{14}$$

$$\det S\big(g_i(\lambda,k)\big) = (-1)^n n^n \Big(\frac{k_j}{\tilde{k}}\Big)^{n(2mn-(2i+1)n-1)} (b_{ip+j})^{2mn-(2i+1)n-1} \det S(g_{i+1}) + \ldots, \tag{15}$$

де три крапки означають доданки зі степенями b_{ip+j}^{α}, $0 \le \alpha \le 2mn-(2i+1)n-2$.

Для знаходження $\det S\big(g_{m-1}(\lambda,k)\big)$ використаємо лему 3.2 при $\alpha = 0$ і $g_{m-1,0} = 1$

$$\det S\big(g_{m-1}(\lambda,k)\big) = n^n b_{(m-1)p+j}^{n-1} \Big(\frac{k_j}{\tilde{k}}\Big)^{n(n-1)} + \ldots, \quad j = 1, \dots, p, \tag{16}$$

де три крапки означають доданки зі степенями $b_{(m-1)p+j}^{\alpha}$, $0 \le \alpha \le n-2$.

Теорема 3. *Нехай $0 < \delta < 1$, $r > p$, коефіцієнти системи (1) фіксовані (за винятком коефіцієнтів $b_1, \dots, b_{mp}$). Тоді існує така множина $W_\delta \subset \mathcal{O}_R^{mp}$, що $\operatorname{meas} W_\delta \le \delta$ і для всіх векторів $b \in \mathcal{O}_R^{mp} \setminus W_\delta$ та для всіх $k \neq 0$ при $\eta_1 > m(mn-1)r/2$ справджується оцінка*

$$|\det S\big(f(\lambda,k)\big)| \ge \delta^{m(mn-1)/2} C_5 \tilde{k}^{-\eta_1}, \tag{17}$$

де $C_5 = n^{mn}\big(m\zeta(r)(p+1)^n \pi^{mp} R^{2mp-2}\big)^{-m(mn-1)/2}$.

Доведення. Використовуючи рівності (15) і (16), формулу (14) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \det S\big(f(\lambda,k)\big) &= (-1)^{n(m-1)} n^{mn} \Big(\frac{k_j}{\tilde{k}}\Big)^{n\big((2mn-n-1)+(2mn-3n-1)+\ldots+(3n-1)+(n-1)\big)} \\ &\times (b_j)^{2mn-n-1} (b_{p+j})^{2mn-3n-1} \ldots (b_{(m-2)p+j})^{3n-1} (b_{(m-1)p+j})^{n-1} + \ldots \\ &= (-1)^{n(m-1)} n^{mn} \Big(\frac{k_j}{\tilde{k}}\Big)^{mn(mn-1)} B_j(k) B_{p+j}(k) \ldots B_{(m-1)p+j}(k), \end{aligned}$$

де $B_{ip+j}(k)$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, — унітарний многочлен степеня $2(m-i)n-n-1$ змінної b_{ip+j}, коефіцієнти якого не залежать від $b_1, \dots, b_{ip+j-p}$, $j = 1, \dots, p$. Знайдемо модуль визначника матриці Сильвестра $S\big(f(\lambda,k)\big)$ многочлена $f(\lambda,k)$

$$|\det S(f(\lambda,k))| = n^{mn}\Big(\frac{|k_j|}{\tilde{k}}\Big)^{mn(mn-1)}|B_j(k)||B_{p+j}(k)|\dots|B_{(m-1)p+j}(k)|. \qquad (18)$$

У рівності (18) однозначно виберемо індекс $j = j(k)$ так, щоб $k_j = \max\{k_1,\dots,k_p\}$.

Нехай $W_\delta^{m-1}(k)$ — множина тих векторів $b \in \mathcal{O}_R^{mp}$, для яких при фіксованому k виконується оцінка

$$|B_{(m-1)p+j}(k)| < \Big(\frac{\delta\tilde{k}^{-r}}{m\zeta(r)\pi^{mp}R^{2mp-2}}\Big)^{(n-1)/2}, \quad j = 1,\dots,p. \qquad (19)$$

Оцінимо міру цієї множини. Позначимо через $\tilde{W}_\delta^{m-1}(k) \subset \mathcal{O}_R^p$ множину тих векторів $b_{(m-1)p+1},\dots,b_{mp}$, а через $\tilde{W}_\delta^{m-1}(k,\tilde{b}_{(m-1)p+j})$ — множину тих значень змінної $b_{(m-1)p+j}$ для фіксованого $\tilde{b}_{(m-1)p+j}$, де $\tilde{b}_{(m-1)p+j}$ — вектор з компонентами $b_{(m-1)p+1},\dots,b_{mp}$ без компоненти $b_{(m-1)p+j}$, для яких виконується нерівність (19). Оскільки множина $W_\delta^{m-1}(k)$ є декартовим добутком $\mathcal{O}_R^{(m-1)p} \times \tilde{W}_\delta^{m-1}(k)$, то її міра знаходиться за формулою

$$\operatorname{meas} W_\delta^{m-1}(k) = (\pi R^2)^{(m-1)p}\operatorname{meas}\tilde{W}_\delta^{m-1}(k),$$

де

$$\operatorname{meas}\tilde{W}_\delta^{m-1}(k) = \int\limits_{\mathcal{O}_R^{p-1}} \operatorname{meas}\tilde{W}_\delta^{m-1}(k,\tilde{b}_{(m-1)p+j})\,d\tilde{b}_{(m-1)p+j}.$$

За лемою Картана для міри множини $\tilde{W}_\delta^{m-1}(k,\tilde{b}_{(m-1)p+j})$ справджується оцінка

$$\operatorname{meas}\tilde{W}_\delta^{m-1}(k,\tilde{b}_{(m-1)p+j}) \le \frac{\delta\tilde{k}^{-r}}{m\zeta(r)(\pi R^2)^{mp-1}}.$$

Після інтегрування по області $\mathcal{O}_R^{p-1}$ отримаємо, що

$$\operatorname{meas}\tilde{W}_\delta^{m-1}(k) \le \frac{\delta\tilde{k}^{-r}}{m\zeta(r)(\pi R^2)^{(m-1)p}}.$$

Тоді для міри множини $W_\delta^{m-1}(k)$ справедлива оцінка $\operatorname{meas} W_\delta^{m-1}(k) \le \dfrac{\delta\tilde{k}^{-r}}{m\zeta(r)}$.

Нехай $W_\delta^{m-2}(k)$ — множина тих векторів $b \in \mathcal{O}_R^{mp}$, для яких при фіксованому k виконується оцінка

$$|B_{(m-2)p+j}(k)| < \Big(\frac{\delta\tilde{k}^{-r}}{m\zeta(r)\pi^{mp}R^{2mp-2}}\Big)^{(3n-1)/2}, \quad j = 1,\dots,p. \qquad (20)$$

Оцінимо міру цієї множини. Позначимо через $\tilde{W}_\delta^{m-2}(k) \subset \mathcal{O}_R^{2p}$ множину тих векторів $b_{(m-2)p+1},\dots,b_{mp}$, а через $\tilde{W}_\delta^{m-2}(k,\tilde{b}_{(m-2)p+j})$ — множину тих значень змінної $b_{(m-2)p+j}$ для фіксованого $\tilde{b}_{(m-2)p+j}$ з останніми p компонентами з $\tilde{W}_\delta^{m-1}(k)$, де $\tilde{b}_{(m-2)p+j}$ — вектор з компонентами $b_{(m-2)p+1},\dots,b_{mp}$ без компоненти $b_{(m-2)p+j}$, для яких виконується (20). Оскільки $W_\delta^{m-2}(k) = \mathcal{O}_R^{(m-2)p} \times \tilde{W}_\delta^{m-2}(k)$, то $\operatorname{meas} W_\delta^{m-2}(k) = (\pi R^2)^{(m-2)p}\operatorname{meas}\tilde{W}_\delta^{m-2}(k)$. Для міри множини $\tilde{W}_\delta^{m-2}(k,\tilde{b}_{(m-2)p+j})$ за лемою Картана справджується оцінка

$$\operatorname{meas}\tilde{W}_\delta^{m-2}(k,\tilde{b}_{(m-2)p+j}) \le \frac{\delta\tilde{k}^{-r}}{m\zeta(r)(\pi R^2)^{mp-1}}.$$

Зінтегрувавши по області $\mathcal{O}_R^{2p-1} \times (\mathcal{O}_R^p \setminus \tilde{W}_\delta^{m-1}(k))$, отримаємо оцінку для міри множини $\tilde{W}_\delta^{m-2}(k)$: $\operatorname{meas}\tilde{W}_\delta^{m-2}(k) \le \dfrac{\delta\tilde{k}^{-r}}{m\zeta(r)(\pi R^2)^{(m-2)p}}$. Тоді для міри множини $W_\delta^{m-2}(k)$ виконується оцінка: $\operatorname{meas} W_\delta^{m-2}(k) \le \dfrac{\delta\tilde{k}^{-r}}{m\zeta(r)}$. Аналогічно, позначимо через $W_\delta^i(k)$, $i = 0,1,\dots,m-1$, множину тих векторів $b \in \mathcal{O}_R^{mp}$, для яких при фіксованому k виконується оцінка

$$|B_{ip+j}(k)| < \Big(\frac{\delta\tilde{k}^{-r}}{m\zeta(r)\pi^{mp}R^{2mp-2}}\Big)^{(2mn-(2i+1)n-1)/2}, \quad j = 1,\dots,p. \qquad (21)$$

Знайдемо оцінки мір множин $W_\delta^i(k)$, $i = 0,1,\dots,m-1$. Нехай $\tilde{W}_\delta^i(k) \subset \mathcal{O}_R^{(m-i)p}$ — множина тих векторів $b_{ip+1},\dots,b_{mp}$, а $\tilde{W}_\delta^i(k,\tilde{b}_{ip+j})$ — множина тих значень змінної b_{ip+j} для фіксованого $\tilde{b}_{ip+j}$ з останніми $(m-i-1)p$ компонентами з множини $\tilde{W}_\delta^{i+1}(k)$, де $\tilde{b}_{ip+j}$ — вектор з компонентами $b_{ip+1},\dots,b_{mp}$ без компоненти b_{ip+j}, для яких виконується нерівність (21). Оскільки $W_\delta^i(k) = \mathcal{O}_R^{ip} \times \tilde{W}_\delta^i(k)$, то $\operatorname{meas} W_\delta^i(k) = (\pi R^2)^{ip}\operatorname{meas}\tilde{W}_\delta^i(k)$. Для міри множини $\tilde{W}_\delta^i(k,\tilde{b}_{ip+j})$ за лемою Картана справджується оцінка

$$\operatorname{meas}\tilde{W}_\delta^i(k,\tilde{b}_{ip+j}) \le \frac{\delta\tilde{k}^{-r}}{m\zeta(r)(\pi R^2)^{mp-1}}.$$

Інтегруючи по області $\mathcal{O}_R^{ip-1} \times (\mathcal{O}_R^{(m-i-1)p} \setminus \tilde{W}_\delta^{i+1}(k))$, отримуємо оцінку

$$\operatorname{meas}\tilde{W}_\delta^i(k) \le \frac{\delta\tilde{k}^{-r}}{m\zeta(r)(\pi R^2)^{ip}}.$$

Таким чином, для міри множини $W_\delta^i(k)$ маємо нерівність $\operatorname{meas} W_\delta^{m-2}(k) \le \dfrac{\delta\tilde{k}^{-r}}{m\zeta(r)}$.

На множині $\mathcal{O}_R^{mp} \setminus W_\delta(k)$, де $W_\delta(k) = \bigcup\limits_{i=0}^{m-1} W_\delta^i(k)$, а $\operatorname{meas} W_\delta(k) \le \sum\limits_{i=0}^{m-1}\operatorname{meas} W_\delta^i(k) \le \dfrac{\delta\tilde{k}^{-r}}{\zeta(r)}$, з рівності (18) та нерівностей (19)–(21) випливає нерівність

$$\begin{aligned}\Big|\det S(f(\lambda,k))\Big| &\ge n^{mn}\Big(\frac{\delta}{m\zeta(r)(p+1)^n\pi^{mp}R^{2mp-2}}\Big)^{m(mn-1)/2}\tilde{k}^{-m(mn-1)r/2} = \\ &= \delta^{m(mn-1)/2}C_5\tilde{k}^{-\eta_1}\end{aligned}$$

для фіксованого вектора $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$. Отже, поза множиною $W_\delta = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}} W_\delta(k)$ міри $\operatorname{meas} W_\delta \le \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\operatorname{meas} W_\delta(k) = \delta$ нерівність (17) виконується для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$. □

Розглянемо умови виконання нерівностей (13). Послідовність знаменників функції $\rho(t,\lambda_l(k))$ може мати збіжні до нуля підпослідовності. Для оцінювання $\rho(t,\lambda_l(k))$ побудуємо виняткові множини малої міри на комплексній площині для $\mu \in \mathcal{O}_M$, використання яких є варіантом метричного підходу до оцінювання малих знаменників [4, 10].

Виберемо додатні числа η_2 та χ з умов $\eta_2 > \dfrac{p}{2}$, $\chi^2 32nT^2\zeta(2\eta_2) = \pi$. Нехай $\varepsilon<1$ і, додатково, $\sqrt{\varepsilon} < \ln 2/(2\chi T)$, якщо $n = 1$; тоді для $n > 1$ виконується наступна нерівність $\ln 2/(2\chi T) = \ln 2\sqrt{8n\zeta(2\eta_2)/\pi} \ge \sqrt{8n/\pi}/2 = \sqrt{2n/\pi} > 1$, тобто також $\sqrt{\varepsilon} < \ln 2/(2\chi T)$.

Позначимо $\chi_1 = \chi_1(k) = \sqrt{\varepsilon}\chi\tilde{k}^{-\eta_2}$ та $\mu_l(k) = e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}$, $\mu(k) = e^{\tilde{k}\lambda T}$. Враховуючи ці позначення, отримаємо, що $\rho(t,\lambda) = \dfrac{e^{\tilde{k}\lambda t}}{\mu - \mu(k)}$.

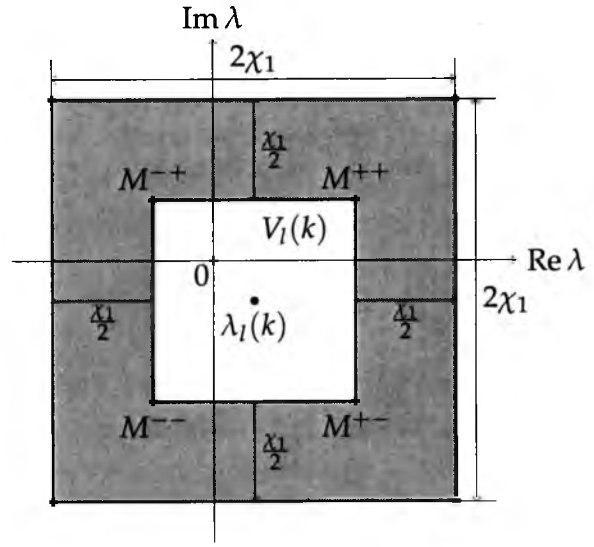

Рис. 1. Концентричні квадрати з центром у точці $\lambda_l(k)$: квадрат $V_l(k)$ зі стороною χ_1 та квадрат із стороною $2\chi_1$. Виділено множину, яка є різницею цих квадратів.

Виберемо множини $V_l(k)$ для тих $l = 1,\dots,n$ та $k \in \mathbb{Z}^p$, що задовольняють умову $|\mu_l(k)| < 2M$, за формулою

$$V_l(k) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}(\lambda - \lambda_l(k))| < \frac{\chi_1}{2},\ |\operatorname{Im}(\lambda - \lambda_l(k))| < \frac{\chi_1}{2}\right\}.$$

Кожна множина $V_l(k)$ — це квадрат (рис. 1) зі стороною χ_1, центром $\lambda_l(k)$ і вершинами $M^{--}, M^{-+}, M^{++}, M^{+-}$ у комплексній площині змінної λ. Точки $M^{--}, M^{-+}, M^{++}, M^{+-}$ зображають комплексні числа $\lambda_l(k) - (1+i)\chi_1/2$, $\lambda_l(k) - (1-i)\chi_1/2$, $\lambda_l(k) + (1+i)\chi_1/2$, $\lambda_l(k) + (1-i)\chi_1/2$ відповідно.

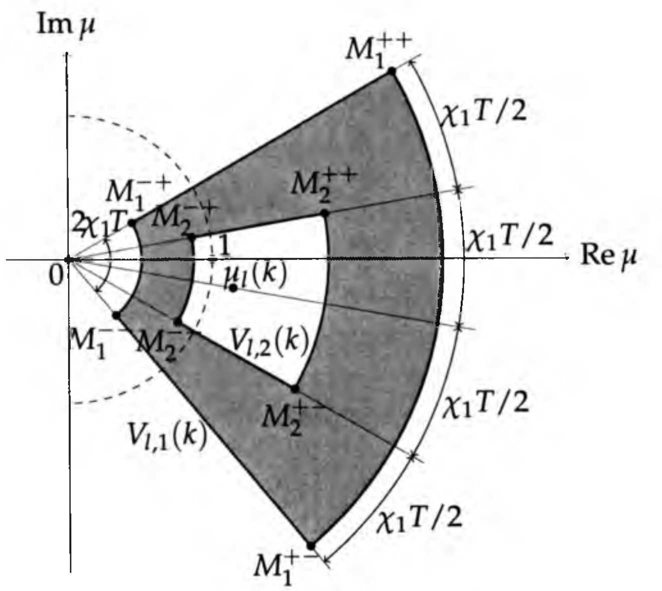

Рис. 2. Образи квадратів з рис. 1 при відображенні $\lambda \to e^{\tilde{k}\lambda T}$.

Нехай множина $V_{l,2}(k)=\left\{\mu\in\mathbb{C} : e^{-\chi_1 T/2}\le\left|\frac{\mu}{\mu_l(k)}\right|\le e^{\chi_1 T/2},\ \left|\arg\frac{\mu}{\mu_l(k)}\right|\le\chi_1 T/2\right\}$ — образ квадрата $V_l(k)$ при відображенні $\lambda \to e^{\tilde{k}\lambda T}$, а множина $V_{l,1}(k)$ є образом концентричного до $V_l(k)$ квадрата зі стороною $2\chi_1$, тобто її можна задати за допомогою формули $V_{l,1}(k) = \left\{\mu\in\mathbb{C} : e^{-\chi_1 T}\le\left|\frac{\mu}{\mu_l(k)}\right|\le e^{\chi_1 T},\ \left|\arg\frac{\mu}{\mu_l(k)}\right|\le\chi_1 T\right\}$. Тоді

$$V_{l,r}(k) = \left\{\mu \in \mathbb{C} : e^{-\chi_1 2^{1-r}T} \le \left|\frac{\mu}{\mu_l(k)}\right| \le e^{\chi_1 2^{1-r}T},\ \left|\arg\frac{\mu}{\mu_l(k)}\right| \le \chi_1 2^{1-r}T\right\}.$$

Множина $V_{l,r}(k)$ є частиною кільця $\left\{\mu \in \mathbb{C} : e^{-\chi_1 2^{1-r}T} \le \left|\frac{\mu}{\mu_l(k)}\right| \le e^{\chi_1 2^{1-r}T}\right\}$, яку видно з початку координат під кутом $\chi_1 2^{1-r}T$ (рис. 2). Площа (міра) множини $V_{l,1}(k)$, яку назвемо винятковою множиною для заданого k, обчислюється за формулою

$$\operatorname{meas} V_{l,1}(k) = \frac{2\chi_1 T}{2\pi}\left(\pi|\mu_l(k)|^2 e^{2\chi_1 T} - \pi|\mu_l(k)|^2 e^{-2\chi_1 T}\right) = \chi_1 T|\mu_l(k)|^2\left(e^{2\chi_1 T} - e^{-2\chi_1 T}\right).$$

Оскільки $e^{2\chi_1 T} < 2$ і $\dfrac{e^{y_2\chi_1 T} - e^{y_1\chi_1 T}}{y_2 - y_1} = \chi_1 T e^{y_3\chi_1 T} \le \chi_1 T e^{y_2\chi_1 T}$, де $y_3 \in (y_1, y_2)$, то

$$\begin{aligned}\operatorname{meas} V_{l,1}(k) &= 4\chi_1 T|\mu_l(k)|^2\frac{e^{2\chi_1 T} - e^{-2\chi_1 T}}{4}\\ &\le 4\left(\chi_1 T|\mu_l(k)|\right)^2 e^{2\chi_1 T} \le 4(2\chi_1 TM)^2 e^{2\chi_1 T} < 32(\chi_1 TM)^2.\end{aligned}$$

Об'єднаємо виняткові множини $V_{l,1}(k)$ в одну виняткову множину

$$V_\varepsilon = \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^p;\\ |\mu_l(k)|\le 2M}}\ \bigcup_{l=1}^{n} V_{l,1}(k)$$

і знайдемо оцінку її міри: $\operatorname{meas} V_\varepsilon = \sum\limits_{\substack{k\in\mathbb{Z}^p;\\ |\mu_l(k)|\le 2M}}\ \sum\limits_{l=1}^{n} \operatorname{meas} V_{l,1}(k) \le 32(TM)^2 \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\chi_1^2$. Враховуючи позначення χ_1 та χ, звідси отримуємо нерівність

$$\operatorname{meas} V_\varepsilon \le 32nT^2\zeta(2\eta_2)\chi^2\varepsilon M^2 = \varepsilon\pi M^2 = \varepsilon \operatorname{meas}\mathcal{O}_M. \tag{22}$$

Параметр μ вважатимемо елементом множини $\mathcal{O}_M \setminus V_\varepsilon$. Враховуючи формулу (22), для міри множини $\mathcal{O}_M \setminus V_\varepsilon$ запишемо оцінку $\operatorname{meas}(\mathcal{O}_M \setminus V_\varepsilon) \ge (1-\varepsilon)\operatorname{meas}\mathcal{O}_M$.

Лема 3.3 ([4]). *Якщо $\eta_2 > p/2$, то для всіх $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus V_\varepsilon$ функція $\rho(\lambda, t)$ в області $V_l(k) \times [0, T]$ має оцінку зверху $|\rho(t,\lambda)| \le \frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon}}\tilde{k}^{\eta_2}$, де $\theta = 8\max\{2, 1/|\mu|\}\sqrt{2\pi n\zeta(2\eta_2)}$.*

Оскільки $\lambda_l(k) \in V_l(k)$ і $\left|\dfrac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\right| = |\rho(t, \lambda_l(k))|$, то оцінка (13) виконується для всіх $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus V_\varepsilon$. Сформулюємо загальну теорему існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\bar{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)$.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми 1, $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus V_\varepsilon$. Тоді у разі $\varphi_0 \in \bar{\mathbf{H}}_\psi(\mathcal{S}^p)$, $\varphi_1 \in \bar{\mathbf{H}}_{\psi-1}(\mathcal{S}^p), \dots, \varphi_{n-1} \in \bar{\mathbf{H}}_{\psi-n+1}(\mathcal{S}^p)$, де $\psi = q + \left(p + m(mn-1)r\right)/2$, $r > p$, і для всіх векторів $b \in \mathcal{O}_R^{mp} \setminus W_\delta$ існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) $u \in \bar{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)$, який неперервно залежить від правих частин умов (2).*

Доведення. З теореми 1 випливає єдиність розв'язку задачі (1), (2). За теоремою 3 для всіх векторів $b \in \mathcal{O}_R^{mp} \setminus W_\delta$ виконується оцінка (12) для $\eta_1 > m(mn-1)(2n+r)/2$, де $r > p$. Згідно з лемою 3.3, для довільного $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus V_\varepsilon$ виконується оцінка (13) для $\eta_2 > p/2$. Таким чином, з теореми 2 випливає як існування розв'язку задачі (1), (2) з простору $\mathbf{\tilde{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)$, так і його неперервна залежність від функцій $\varphi_0 \in \mathbf{\tilde{H}}_\psi(\mathcal{S}^p)$, $\varphi_1 \in \mathbf{\tilde{H}}_{\psi-1}(\mathcal{S}^p)$, $\ldots$, $\varphi_{n-1} \in \mathbf{\tilde{H}}_{\psi-n+1}(\mathcal{S}^p)$ для $\psi = q + (p + m(mn-1)r)/2$. □

Висновки

У роботі розглянуто нелокальну крайову задачу для системи диференціально-операторних рівнянь з оператором диференціювання $B=(B_1,\ldots,B_p)$, де $B_j \equiv z_j\dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j=1,\ldots,p$, який діє на функції комплексних змінних $(z_1,\ldots,z_p)$. Для встановлення розв'язності задачі введено шкали $\{\mathbf{\tilde{H}}_q(\mathcal{S}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$ і $\{\mathbf{\tilde{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$ просторів вектор-функцій багатьох комплексних змінних. Розглядувана задача є некоректною за Адамаром, а її розв'язність залежить від малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників для всіх (за винятком множини нульової або малої міри) векторів, складених з компонент коефіцієнтів $A_{s_0,s}$ системи та параметра μ. На основі цих теорем встановлено достатні умови існування розв'язку задачі у $\mathbf{\tilde{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)$, де q — довільне дійсне число. Знайдено необхідні та достатні умови єдиності розв'язку.

References

[1] Borok V.M., Fardigola L.V. *Nonlocal well-posed boundary-value problems in a layer.* Math. Notes 1990, **48** (1), 635–639. doi:10.1007/BF01164259 (translation of Mat. Zametki 1990 **48** (1), 20–25. (in Russian))

[2] Goy T.P., Ptashnyk B.I. *Problem with nonlocal conditions for weakly nonlinear hyperbolic equations.* Ukrainian Math. J. 1997, **49** (2), 204–215. doi:10.1007/BF02486436 (translation of Ukrain. Mat. Zh. 1997, **49** (2), 186–195. (in Ukrainian))

[3] Zadorozhna N.M., Ptashnyk B.I. *Nonlocal boundary value problem for parabolic equations with variable coefficients.* Ukrainian Math. J. 1995, **47** (7), 1050–1057. doi:10.1007/BF01084900 (translation of Ukrain. Mat. Zh. 1995, **47** (7), 915–921. (in Ukrainian))

[4] Il'kiv V.S., Strap N.I. *Nonlocal boundary value problem for partial differential equations in multidimensional complex domain.* Sci. Bull. Uzhhorod Univ. Mathematics and informatics 2013, **24** (1), 60–72. (in Ukrainian)

[5] Kalenyuk P.I., Nytrebych Z.M., Kohut I.V. *Problem with nonlocal two-point condition in time variable for homogeneous partial differential equation of infinite order in spatial variables.* Math. Methods Phys. Mech. Fields 2008, **51** (4), 17–26. (in Ukrainian)

[6] Maherovska T.V. *Investigation of smoothness for the solution of the Cauchy problem for systems of partial differential equations by the metric approach.* Sci. Bull. Chernivtsi Univ. Math. Series 2011, **1** (1-2), 84–93. (in Ukrainian)

[7] Matiychuk M.I. Parabolic and elliptic boundary value problems with singularities. Prut, Chernivtsi, 2003. (in Ukrainian)

[8] Nakhushev A.M. Problems with a shift for partial differential equations. Nauka, Moscow, 2006. (in Russian)

[9] Prasolov V.V. Polynomials. MSCME, Moscow, 2001. (in Russian)

[10] Ptashnyk B.Yo. Incorrect boundary value problems for partial differential equations. Naukova Dumka, Kyiv, 1984. (in Russian)

[11] Ptashnyk B.Yo., Il'kiv V.S., Kmit' I.Ya., Polishchuk V.M. Nonlocal boundary value problems for partial differential equations. Naukova Dumka, Kyiv, 2002. (in Ukrainian)

[12] Horne R. Johnson. Matrix analysis. Mir, Moscow, 1989. (in Russian)

[13] Eloe Paul W., Ahmad Bashir. *Positive solutions of a nonlinear nth order boundary value problem with nonlocal conditions.* Appl. Math. Lett. 2005, **18** (5), 521–527. doi:10.1016/j.aml.2004.05.009

[14] Karakostas G.L., Tsamatos P.Ch. *Existence results for some n-dimensional nonlocal boundary value problems.* J. Math. Anal. Appl. 2001, **259** (2), 429–438. doi:10.1006/jmaa.2000.7412

Надійшло 01.11.2013

Після переробки 27.01.2014

Il'kiv V.S., Strap N.I. *Non-local boundary value problem for a system of partial differential equations with operator coefficients in a complex domain.* Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 242–255.

The paper is devoted to investigation of non-local boundary problem for a system of partial differential equations with the operator $B=(B_1,\ldots,B_p)$, where $B_j \equiv z_j\dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j=1,\ldots,p$, are operators of the generalized differentiation, which operates on complex variable z_j. Problem is incorrect in the Hadamard sense and the solvability of this problem depends on the small denominators which arising in the construction of the solution. By using of metric approach, the theorem about lower estimation of small denominators was proved, and also existence and uniqueness conditions of this solution in the scale of spaces of many complex variables functions are establish.

Key words and phrases: partial differential equation, operator of generalized differentiation, pseudo-differential operator, small denominators, metric estimation.

Ількив В.С., Страп Н.И. *Нелокальная краевая задача для для системы дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в многомерной комплексной области* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 242–255.

Исследовано нелокальную краевую задачу для системы дифференциальных уравнений с частными производными с векторным оператором $B=(B_1,\ldots,B_p)$, где $B_j \equiv z_j\dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j=1,\ldots,p$, - операторы обобщенного дифференцирования по комплексной переменной z_j. Задача некорректна за Адамаром, а ее решения связано с проблемой малых знаменателей. Доказано метрические теоремы об оценках снизу малых знаменателей, возникающих при построении решения задачи, а также установлены условия существования и единственности данного решения в шкале пространств функций многих комплексных переменных.

Ключевые слова и фразы: уравнение в частных производных, оператор обобщенного дифференцирования, псевдо-дифференциальный оператор, малые знаменатели, метрическая оценка.

ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, 6 (2), 256–259
doi:10.15330/cmp.6.2.256-259

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.256–259

Карлова О.

Функції зі зв'язним графіком та B_1-ретракти

Підмножина E топологічного простору X називається B_1-ретрактом цього простору, якщо існує відображення $r : X \to E$, яке є поточковою границею послідовності неперервних відображень $r_n : X \to E$, і таке, що $r(x) = x$ для всіх $x \in E$. Доводиться, що графік функції $f : \mathbb{R} \to Y$, де простір Y — це об'єднання зростаючої послідовності континуумів, є B_1-ретрактом добутку $\mathbb{R} \times Y$ тоді і тільки тоді, коли функція f неперервна.

Ключові слова і фрази: B_1-ретракт, H_1-ретракт, функція першого класу Бера, функція з лінійно зв'язним графіком.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 2 Kotsjubynskyi str., 58012, Chernivtsi, Ukraine
E-mail: maslenizza.ua@gmail.com

Вступ

Нехай P — деяка властивість відображень. Сукупність усіх відображень між топологічними просторами X і Y, які мають властивість P, ми позначаємо через $P(X, Y)$. Символом C ми позначаємо властивість неперервності.

Відображення $f : X \to Y$, де X і Y — топологічні простори, називається

- *відображенням першого класу Бера*, $f \in B_1(X, Y)$, якщо існує така послідовність неперервних відображень $f_n : X \to Y$, що $f_n(x) \to f(x)$ для всіх $x \in X$;
- *відображенням першого класу Лебега*, $f \in H_1(X, Y)$, якщо множина $f^{-1}(G)$ є типу F_σ в X для довільної відкритої в Y множини G.

Підмножину E топологічного простору X назвемо *P-ретрактом* простору X, якщо існує таке відображення $r \in P(X, E)$, що $r(x) = x$ для всіх $x \in E$. При цьому відображення r називається *P-ретракцією* простору X на E. Якщо відображення r неперервне, то E називається просто *ретрактом* простору X (див. [1]).

Властивості H_1- і B_1-ретрактів досліджувалися в [3] і [4]. Так, в [3] була встановлена наступна характеризація H_1-ретрактів повнометризовних просторів.

Теорема 1. *Множина E є H_1-ретрактом повнометризовного простору X тоді і тільки тоді, коли E є типу G_δ в X.*

В [4] було показано, що B_1-ретракт метризовного простору є множиною типу G_δ, а довільний B_1-ретракт зв'язного простору є зв'язним. Проте, ані локальна зв'язність, ані лінійна зв'язність вже не зберігаються B_1-ретракціями (див. [4, Приклад 4.2]).

Також в [4] був отриманий такий результат.

УДК 515.12
2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C20, 54C15, 26A21.

Теорема 2. *Нехай X — повнометризовний простір і $E \subseteq X$ — лінійно зв'язна і локально лінійно зв'язна G_δ-множина. Тоді E є B_1-ретрактом простору X.*

Зауважимо, що кожна B_1-ретракція топологічного простору X на метризовний простір E є також H_1-ретракцією (див., наприклад, [2, Лема 2.7]). Обернене твердження не вірне навіть для зв'язних G_δ-множин $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Так, в [4] був наведений приклад функції $f : [0,1] \to [-1,1]$, графік якої є зв'язною G_δ-підмножиною (а значить, H_1-ретрактом) добутку $[0,1] \times [-1,1]$, але не є B_1-ретрактом простору $[0,1] \times [-1,1]$.

У зв'язку з цим природно постає задача про опис функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, графіки яких є B_1-ретрактами площини $\mathbb{R}^2$. В цій статті ми доводимо, що графік функції $f : \mathbb{R} \to Y$, де простір Y — це об'єднання зростаючої послідовності континуумів, є B_1-ретрактом добутку $\mathbb{R} \times Y$ тоді і тільки тоді, коли функція f неперервна.

Основні результати

Нехай f — деяке відображення топологічного простору X у топологічний простір Y. Графік відображення f ми позначаємо через Γ_f. Для всіх $x \in X$ покладемо

$$\gamma_f(x) = (x, f(x)).$$

Зрозуміло, що $\Gamma_f = \gamma_f(X)$. Крім того, зауважимо, що відображення $f : X \to Y$ неперервне тоді і тільки тоді, коли неперервне відображення $\gamma_f : X \to \Gamma_f$.

Сукупність всіх функцій $f : X \to Y$, графіки яких є P-ретрактами добутку $X \times Y$, ми будемо позначати через $\Gamma_{\mathrm{P}}(X, Y)$.

У світлі теореми 2 виникає питання, чи кожна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з лінійно зв'язним графіком належить до класу $\Gamma_{\mathrm{B}_1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? Покажемо, що відповідь на це позитивна.

Нагадаємо, що відображення f між топологічними просторами X та Y *має властивість Дарбу*, якщо образ $f(C)$ довільної зв'язної множини $C \subseteq X$ є зв'язною множиною в Y.

Лема 1. *Якщо існує біекція φ з властивістю Дарбу лінійно зв'язного гаусдорфового простору X на відрізок $[a, b]$, то X — компакт.*

Доведення. З лінійної зв'язності простору X випливає, що існує така неперервна функція $\gamma : [a, b] \to X$, що $\varphi^{-1}(a) = \gamma(a)$ і $\varphi^{-1}(b) = \gamma(b)$. Оскільки множина $\varphi(\gamma([a, b])) \subseteq [a, b]$ зв'язна і містить кінці відрізка $[a, b]$, то вона збігається з $[a, b]$. Тоді $\gamma([a, b]) = \varphi^{-1}([a, b]) = X$, адже φ — біекція. Таким чином, X — компакт, як гаусдорфовий неперервний образ компакта. □

Через π_X та π_Y ми будемо позначати проекції $\pi_X : X \times Y \to X$, $\pi_X(x, y) = x$, і $\pi_Y : X \times Y \to Y$, $\pi_Y(x, y) = y$.

Твердження 1. *Нехай Y — топологічний простір. Для відображення $f : [a, b] \to Y$ наступні умови рівносильні:*

1) f — неперервне;
2) Γ_f — лінійно зв'язний;
3) Γ_f — компакт.

Доведення. Імплікація 1) $\Rightarrow$ 2) випливає з рівності $\Gamma_f = \gamma_f([a,b])$ і неперервності відображення γ_f.

2) $\Rightarrow$ 3). Легко бачити, що простір Γ_f гаусдорфовий. Оскільки відображення $\pi_X|_{\Gamma_f}$ є неперервною біекцією на відрізок $[a,b]$, то простір Γ_f є компактом за лемою 1.

3) $\Rightarrow$ 1). Оскільки неперервна біекція $\pi_X|_{\Gamma_f}$ між компактами є гомеоморфізмом, то відображення $\gamma_f = (\pi_X|_{\Gamma_f})^{-1}$ неперервне. Тому відображення $f = \pi_Y \circ \gamma_f : [a,b] \to Y$ теж неперервне. □

Зауважимо, що для відображення f, визначеного на зв'язній підмножині $X \subseteq \mathbb{R}$ умови 1) або 2) твердження 1 виконуються тоді і тільки тоді, коли вони виконуються для звуження відображення $f|_{[a,b]}$ на довільний відрізок $[a,b] \subseteq X$. Таким чином, з твердження 1 негайно випливає наступний факт.

Наслідок 1. *Нехай $X \subseteq \mathbb{R}$ — зв'язна множина і Y — топологічний простір. Для відображення $f : X \to Y$ наступні умови рівносильні:*

1) f — неперервне;

2) Γ_f — лінійно зв'язний.

Твердження 2. *Нехай $X \subseteq \mathbb{R}$ — зв'язна множина і Y — лінійно зв'язний простір. Для відображення $f : X \to Y$ наступні умови рівносильні:*

1) f — неперервне;

2) Γ_f — лінійно зв'язний;

3) Γ_f — ретракт добутку $X \times Y$.

Доведення. Досить довести імплікації 1) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2).

Якщо відображення f неперервне, то і відображення $r : X \times Y \to \Gamma_f$, $r(x,y) = \gamma_f(x)$, неперервне, причому $r(x,y) = (x,y)$ для всіх $(x,y) \in \Gamma_f$. Отже, 1) $\Rightarrow$ 3).

Якщо ж $r : X \times Y \to \Gamma_f$ — деяка ретракція, то простір $\Gamma_f = r(X \times Y)$ лінійно зв'язний як образ лінійно зв'язного простору при неперервному відображенні. Таким чином, встановлена імплікація 3) $\Rightarrow$ 2). □

Нагадаємо, що зв'язний компактний гаусдорфовий простір називається *континуумом*. Казатимемо, що гаусдорфовий простір є *σ-континуумом*, якщо він подається у вигляді об'єднання зростаючої послідовності своїх зв'язних компактних підпросторів.

Підпростір E топологічного простору X називається *слабким B_1-ретрактом* [5] цього простору, якщо існує така послідовність $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних відображень $r_n : X \to E$, що $r_n(x) \to x$ для всіх $x \in E$.

Твердження 3. *Нехай $X \subseteq \mathbb{R}$ — зв'язна множина, Y — σ-континуум і $f : X \to Y$ — відображення, графік якого є слабким B_1-ретрактом добутку $X \times Y$. Тоді відображення f неперервне у всіх внутрішніх точках множини X.*

Доведення. Розглянемо послідовність $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних відображень $r_n : X \times Y \to \Gamma_f$, таку, що $r_n(p) \to p$ для всіх $p \in \Gamma_f$, і таку зростаючу послідовність $(K_m)_{m=1}^{\infty}$ континуумів, що $Y = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} K_m$.

Візьмемо довільний відрізок $[a,b] \subseteq \operatorname{int} X$ і покажемо, що відображення f неперервне на цьому відрізку. Нехай x_1, x_2 — такі точки з X, що $x_1 < a$ і $x_2 > b$. Оскільки $r_n(\gamma_f(x_i)) \to \gamma_f(x_i)$ при $i = 1,2$, то існує таке $n \in \mathbb{N}$, що $\pi_X(r_n(\gamma(x_1))) < a$ і $\pi_X(r_n(\gamma(x_2))) > b$. Позначимо $F_m = \pi_X(r_n([x_1,x_2] \times K_m))$. Тоді $(F_m)_{m=1}^{\infty}$ — зростаюча послідовність континуумів в $\mathbb{R}$, об'єднання яких покриває відрізок $[a,b]$. Легко бачити, що існує таке $m \in \mathbb{N}$, що $[a,b] \subseteq F_m$. Тоді $\Gamma_{f|_{[a,b]}} = ([a,b] \times Y) \cap r_n([x_1,x_2] \times K_m)$. Отже, графік звуження $f_{[a,b]}$ є компактом. З твердження 1 випливає, що відображення $f_{[a,b]}$ неперервне. □

З тверджень 2, 3 і очевидного включення $\Gamma_C(X,Y) \subseteq \Gamma_{B_1}(X,Y)$, яке справджується для довільних топологічних просторів X і Y, випливає наступний результат.

Теорема 3. *Нехай Y — σ-континуум. Тоді* $\Gamma_C(\mathbb{R},Y) = \Gamma_{B_1}(\mathbb{R},Y) = C(\mathbb{R},Y)$.

Зауваження 1. *Теорема 3 не вірна для функцій двох змінних. Розглянемо таку функцію $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, що $f(x,0) = -x^2$ при $|x| \le 1$ і $f(x,y) = 0$ при $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus ([-1,1] \times \{0\})$. Функція f розривна в усіх точках множини $[-1,1] \times \{0\}$. Графік Γ_f цієї функції є лінійно зв'язною і локально лінійно зв'язною G_δ-підмножиною простору $\mathbb{R}^3$. Тому $f \in \Gamma_{B_1}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ згідно з теоремою 2. З іншого боку, множина Γ_f не замкнена в $\mathbb{R}^3$. Звідси випливає, що $f \notin \Gamma_C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, адже довільний ретракт гаусдорфового простору замкнений в ньому.*

REFERENCES

[1] Borsuk K. Retracts theory. Mir, Moscow, 1971. (in Russian)

[2] Zolotuhina T., Karlova O., Sobchuk O. *On extention of Baire-one functions with values in σ- metricized spaces.* Ukr. Math. Visn. 2008, **5** (2), 280–287. (in Ukrainian)

[3] Karlova O. *Extension of continuous mappings and H_1-retracts.* Bull. Aust. Math. Soc. 2008, **78** (3), 497–506. doi:10.1017/S0004972708000907

[4] Karlova O. *Extension of continuous functions to Baire-one functions.* Real Anal. Exchange 2011, **36** (1), 149–160.

[5] Karlova O. *On perfect cones and absolute B_1-retracts.* Tatra Mt. Math. Publ. (accepted).

Надійшло 24.09.2013

Після переробки 03.10.2014

Karlova O. *Functions with connected graph and B_1-retracts.* Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 256–259.

A subset E of a topological space X is called a B_1-retract if there exists a mapping $r : X \to E$ which is the pointwise limit of a sequence of continuous mappings $r_n : X \to E$ and $r(x) = x$ for all $x \in E$. We prove that if Y is a union of an increasing sequence of continuums, then the graph of a function $f : \mathbb{R} \to Y$ is a B_1-retract of $\mathbb{R} \times Y$ if and only if f is continuous.

Key words and phrases: B_1-retract, H_1-retract, Baire-one function, function with arcwise connected graph.

Карлова Е. *Функции со связным графиком и B_1-ретракты* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 256–259.

Подмножество E пространства X называется B_1-ретрактом этого пространства, если существует отображение $r : X \to E$, которое является поточечным пределом последовательности непрерывных отображений $r_n : X \to E$, причем $r(x) = x$ для всех $x \in E$. Доказано, что график функции $f : \mathbb{R} \to Y$, где пространство Y — это объединение возрастающей последовательности континуумов, является B_1-ретрактом произведения $\mathbb{R} \times Y$ в том и только том случае, если функция f непрерывна.

Ключевые слова и фразы: B_1-ретракт, H_1-ретракт, функция первого класса Бэра, функция с линейно связным графиком.

ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, 6 (2), 260–281
doi:10.15330/cmp.6.2.260-281

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.260–281

KIRICHENKO V.[1], KHIBINA M.[2], MASHCHENKO L.[3], PLAKHOTNYK M.[1], ZHURAVLEV V.[1]

GORENSTEIN TILED ORDERS

The aim of this article is to describe exponent matrices of Gorenstein tiled orders. The necessary and sufficient condition for possibility such to construct a Gorenstein tiled order which has given orders over some discrete valuation ring (the unique for the whole main diagonal) on the main diagonal and its permutation be a product of correspond cycles with given cyclic Gorenstein tiled order is considered.

Key words and phrases: Gorenstein tiled order, exponent matrix, Kirichenko's permutation.

[1] Taras Shevchenko National University, 64/13 Volodymyrska str., 01601, Kyiv, Ukraine
[2] Institute of Engineering Thermophysics, National Academy of Sciences of Ukraine, 2-a Zhelyabova str., 03057, Kyiv, Ukraine
[3] Kyiv National University of Trade and Economics, 19 Kioto str., 02156, Kyiv, Ukraine
E-mail: vkir@univ.kiev.ua (Kirichenko V.), mkhibina@ukr.net (Khibina M.), maschenkolz@list.ru (Mashchenko L.), makar_plakhotnyk@ukr.net (Plakhotnyk M.), vshur@univ.kiev.ua (Zhuravlev V.)

INTRODUCTION

The notion of tiled orders was introduced at first in [1]. Gorenstein tiled orders appeared in the first time in the article [2] and a convenient criterion for tiled order to be a Gorenstein order is also given there. It is shown in [3] that injective dimension of a Gorenstein tiled order is equal to 1. More then this tiled orders with injective dimension 1 are Gorenstein. The description of cyclic Gorenstein tiled orders has been done at [4].

The aim of this article is to describe exponent matrices of Gorenstein tiled orders. The necessary and sufficient condition for possibility such to construct a Gorenstein tiled order which has given orders over some discrete valuation ring (the unique for the whole main diagonal) on the main diagonal and its permutation be a product of correspond cycles with given cyclic Gorenstein tiled order is considered.

The necessary information about tiled orders and exponent matrices can be found in [5, 6].

1 TILED ORDERS OVER DISCRETE VALUATION RINGS

Recall [7] that a *semimaximal ring* is a semiperfect semiprime right Noetherian ring A such that for each primitive idempotent $e \in A$ the ring eAe is a discrete valuation ring (not necessarily commutative).

Denote by $M_n(B)$ the ring of all $n \times n$ matrices over a ring B.

УДК 512.552
2010 *Mathematics Subject Classification:* 16G30, 16P40.

Theorem 1 (see [7]). *Each semimaximal ring is isomorphic to a finite direct product of prime rings of the following form*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{\alpha_{12}}\mathcal{O} & \dots & \pi^{\alpha_{1n}}\mathcal{O} \\ \pi^{\alpha_{21}}\mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & \pi^{\alpha_{2n}}\mathcal{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi^{\alpha_{n1}}\mathcal{O} & \pi^{\alpha_{n2}}\mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

where $n \geq 1$, $\mathcal{O}$ is a discrete valuation ring with a prime element π, and α_{ij} are integers such that $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}, \alpha_{ii} = 0$ for all i, j, k.

The ring $\mathcal{O}$ is embedded into its classical division ring of fractions $\mathcal{D}$, and (1) is the set of all matrices $(a_{ij}) \in M_n(\mathcal{D})$ such that

$$a_{ij} \in \pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O} = e_{ii}\Lambda e_{jj},$$

where $e_{11}, \dots, e_{nn}$ are the matrix units of $M_n(\mathcal{D})$. It is clear that $Q = M_n(\mathcal{D})$ is the classical ring of fractions of Λ. Obviously, the ring A is right and left Noetherian.

Definition 1.1. *A module M is* distributive *if its lattice of submodules is distributive, i.e.,*

$$K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N$$

for all submodules K, L, and N.

Clearly, any submodule and any factormodule of a distributive module are distributive modules. A *semidistributive module* is a direct sum of distributive modules. A ring A is *right* (*left*) *semidistributive* if it is semidistributive as the right (left) module over itself. A ring A is *semidistributive* if it is both left and right semidistributive (see [8]).

Theorem 2 (see [9]). *The following conditions for a semiperfect semiprime right Noetherian ring A are equivalent:*

- *A is semidistributive;*
- *A is a direct product of a semisimple artinian ring and a semimaximal ring.*

By a *tiled order* over a discrete valuation ring, we mean a Noetherian prime semiperfect semidistributive ring Λ with nonzero Jacobson radical. In this case, $\mathcal{O} = e\Lambda e$ is a discrete valuation ring with a primitive idempotent $e \in \Lambda$.

Definition 1.2. *An integer matrix $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ is called*

- *an* exponent matrix *if $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ and $\alpha_{ii} = 0$ for all i, j, k;*
- *a* reduced exponent matrix *if $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ for all i, j, $i \neq j$.*

We use the following notation $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$, where $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ is the exponent matrix of the ring Λ, i.e.

$$\Lambda = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}\pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O},$$

in which e_{ij} are the matrix units. If a tiled order is *reduced*, i.e., $\Lambda/R(\Lambda)$ is the direct product of division rings, then $\alpha_{ij}+\alpha_{ji}>0$ if $i\neq j$, i.e., $\mathcal{E}(\Lambda)$ is reduced.

We denote by $\mathcal{M}(\Lambda)$ the poset (ordered by inclusion) of all projective right Λ-modules that are contained in a fixed simple Q-module U. All simple Q-modules are isomorphic, so we can choice one of them. Note that the partially ordered sets $\mathcal{M}_l(\Lambda)$ and $\mathcal{M}_r(\Lambda)$ corresponding to the left and the right modules are anti-isomorphic.

The set $\mathcal{M}(\Lambda)$ is completely determined by the exponent matrix $\mathcal{E}(\Lambda)=(\alpha_{ij})$. Namely, if Λ is reduced, then

$$\mathcal{M}(\Lambda)=\{p_i^z \mid i=1,\dots n, \text{and } z\in\mathbb{Z}\},$$

where

$$p_i^z\le p_j^{z'} \iff \begin{cases} z-z'\ge\alpha_{ij} & \text{if } \mathcal{M}(\Lambda)=\mathcal{M}_l(\Lambda),\\ z-z'\ge\alpha_{ji} & \text{if } \mathcal{M}(\Lambda)=\mathcal{M}_r(\Lambda).\end{cases}$$

Obviously, $\mathcal{M}(\Lambda)$ is an infinite periodic set.

Let P be an arbitrary poset. A subset of P is called a chain if any two of its elements are related. A subset of P is called a antichain if no two distinct elements of the subset are related.

Definition 1.3. *A right (resp. left) Λ-module M (resp. N) is called a right (resp. left) Λ-lattice if M (resp. N) is a finitely generated free $\mathcal{O}$-module.*

Given a tiled order Λ we denote $Lat_r(\Lambda)$ (resp. $Lat_l(\Lambda)$) the category of right (resp. left) Λ-lattices. We denote by $S_r(\Lambda)$ (resp. $S_l(\Lambda)$) the partially ordered by inclusion set, formed by all Λ-lattices contained in a fixed simple $M_n(\mathcal{D})$-module W (resp. in a left simple $M_n(\mathcal{D})$-module V). Such Λ-lattices are called irreducible.

Let $\Lambda=\{\mathcal{O},\mathcal{E}(\Lambda)\}$ be a tiled order, W (resp. V) is a simple right (resp. left) $M_n(\mathcal{D})$-module with $\mathcal{D}$-basis $e_1,\dots,e_n$ such that $e_ie_{jk}=\delta_{ij}e_k$ ($e_{ij}e_k=\delta_{jk}e_i$).

Then any right (resp. left) irreducible Λ-lattice M (resp. N), lying in W (resp. in V) is a Λ-module with $\mathcal{O}$-basis $(\pi^{\alpha_1}e_1,\dots,\pi^{\alpha_n}e_n)$, while

$$\begin{cases} \alpha_i+\alpha_{ij}\ge\alpha_j, & \text{for the right case;}\\ \alpha_{ij}+\alpha_j\ge\alpha_i, & \text{for the left case.}\end{cases} \tag{2}$$

Thus, irreducible Λ-lattices M can be identified with integer-valued vector $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ satisfying (2). We shall write $\mathcal{E}(M)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ or $M=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$.

The order relation on the set of such vectors and the operations on them corresponding to sum and intersection of irreducible lattices are obvious.

Remark 1.1. *Obviously, irreducible Λ-lattices $M_1=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ and $M_2=(\beta_1,\dots,\beta_n)$ are isomorphic if and only if $\alpha_i=\beta_i+z$ for $i=1,\dots,n$ and $z\in\mathbb{Z}$.*

For each right (left) Λ-lattice M (N) it is defined a left (right) Λ-lattice $M^*=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M,\mathcal{O}_{\mathcal{O}})$ ($N^*=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(N,{}_{\mathcal{O}}\mathcal{O})$) such that $M^{**}=M$ ($N^{**}=N$) (see. [7], §3). For an arbitrary $\varphi\in M^*$ and $a\in\Lambda$ the multiplication $a\varphi$ is defined with the formula $(a\varphi)(m)=\varphi(ma)$ where $m\in M$. For every homomorphism $\psi\colon M\to N$ of right lattices it is defined a conjugated homomorphism $\psi^*\colon N^*\to M^*$ of left lattices with the rule $(\psi^*f)(m)=f(\psi m)$.

It is especially easy can be defined the duality for an irreducible Λ-lattice. Let $M=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ be an irreducible Λ-lattice. Then $M^*=(-\alpha_1,\dots,-\alpha_n)^T$ is an irresucible left Λ-lattice and for $M\subset N$ we have that $N^*\subset M^*$.

Let Λ be a reduced tiled order with the exponent matrix $\mathcal{E}(\Lambda)=(\alpha_{ij})$. Denote $P_i=(\alpha_{i1},\dots,\alpha_{in})$ and $Q_k=(\alpha_{1k},\dots,\alpha_{ik})^T$, where T is a transpose operation.

Definition 1.4. *A Λ-lattice M is called relatively injective if $M=P^*$ where P is a projective Λ-module. Projective Λ-lattice P is called bijective Λ-lattice if P is a projective left Λ-lattice.*

Example 1. *Let Λ be a reduced tiled order with exponent matrix $\mathcal{E}(\Lambda)=(\alpha_{ij})$, where*

$$\mathcal{E}(\Lambda)=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1\\ 2&1&0&0&0&1\\ 2&2&2&0&0&1\\ 3&3&2&1&0&1\\ 3&2&1&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Here $P_1^*\simeq Q_5$, $P_2^*\simeq Q_6$, $P_4^*\simeq Q_3$, $P_5^*\simeq Q_2$, $P_6^*\simeq Q_1$ but $P_3^*\not\simeq Q_4$.

2 Gorenstein tiled orders and their exponent matrices

Definition 2.1. *A tiled order Λ is called a Gorenstein tiled oreder if Λ is a bijective Λ-lattice i.e. if Λ^* is a projective left Λ-lattice.*

Further we will call a Gorenstein tiled order just as Gorenstein order.

Theorem 3 (see. [2, lemma 3.2]). *The following conditions are equivalent for a reduced tiled order $\Lambda=\{\mathcal{O},\ \mathcal{E}(\Lambda)=(\alpha_{pq})\}$:*

(a) an order Λ is Gorenstein

(b) there exists a permutation $\sigma\colon i\to\sigma(i)$ such that $\alpha_{ik}+\alpha_{k\sigma(i)}=\alpha_{i\sigma(i)}$ for $i=1,\dots,n$; $k=1,\dots,n$.

Denote with $M_n(\mathbb{Z})$ the ring of all square $n\times n$-matrices over integers ring $\mathbb{Z}$. Let $\mathcal{E}\in M_n(\mathbb{Z})$.

Definition 2.2. *Call a matrix $\mathcal{E}=(\alpha_{ij})$ as exponent matrix if $\alpha_{ij}+\alpha_{jk}\ge\alpha_{ik}$ for $i,j,k=1,\dots,n$ and $\alpha_{ii}=0$ for $i=1,\dots,n$. These inequalities are called ring inequalities. An exponent matrix $\mathcal{E}$ is called a reduced exponent matrix if $\alpha_{ij}+\alpha_{ji}>0$ for all $i,j=1,\dots,n$.*

Definition 2.3. *Two exponent matrices $\mathcal{E}=(\alpha_{ij})$ and $\Theta=(\theta_{ij})$ are called* equivalent *if one can be obtained from another with a composition of transformations of the following two types:*

(1) subtracting some integer from all elements of i-th line with simultaneous adding this number to all elements of the i-th column;

(2) simultaneous permuting of two lines and two columns with the same numbers.

Definition 2.4. *The following exponent matrix $\mathcal{E}=(\alpha_{ij})\in M_n(\mathbb{Z})$ is called a Gorenstein matrix if there exists a permutation σ of a set $\{1,2,\dots,n\}$ such that*

$$\alpha_{ik}+\alpha_{k\sigma(i)}=\alpha_{i\sigma(i)} \qquad \text{for all } i,k.$$

The permutation σ is denoted with $\sigma(\mathcal{E})$. If a matrix $\mathcal{E}$ is a reduced Gorenstein exponent matrix then $\sigma(\mathcal{E})$ does not have fixed points.

Proposition 2.1 ([5]). *Let $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ and $\Theta = (\theta_{ij})$ be exponent matrices and Θ is obtained from $\mathcal{E}$ with composition of permutations of the type (1). If $\mathcal{E}$ is a reduced exponent Gorenstein matrix with correspond permutation $\sigma(\mathcal{E})$ then Θ is also reduces exponent Gorenstein matrix with a permutation $\sigma(\Theta) = \sigma(\mathcal{E})$.*

Proposition 2.2 ([5]). *If $\mathcal{E}$ is a Gorenstein matrix then any second type transformation Θ it leaves to be a Gorenstein matrix and for the new correspond permutation π we have $\pi = \tau^{-1}\sigma\tau$ i.e. $\sigma(\Theta) = \tau^{-1}\sigma(\mathcal{E})\tau$.*

Remark 2.1. *A reduced tiled order Λ is Gorenstein if and only if when its exponent matrix $\mathcal{E}(\Lambda)$ is a Gorenstein matrix.*

Definition 2.5. *A reduced Gorenstein exponent matrix $\mathcal{E}$ is called cyclic if $\sigma(\mathcal{E})$ is a cycle.*

Lemma 2.1 ([10]). *Let Λ be a reduced Gorenstein tiled order with an exponent matrix $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ and Kirichenko permutation σ. Then $\alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} + \alpha_{\sigma(j)\sigma(k)} - \alpha_{\sigma(i)\sigma(k)} = \alpha_{ij} + \alpha_{jk} - \alpha_{ik}$.*

Proof. After adding $\alpha_{\sigma(i)\sigma(j)}$ to both sides of the equality $\alpha_{i\sigma(i)} = \alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)}$ we obtain

$$\alpha_{i\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} = \alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} \quad \text{or} \quad \alpha_{i\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} = \alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(j)}.$$

Represent $\alpha_{i\sigma(i)}$ and $\alpha_{j\sigma(j)}$ as sum of two summands as follows $\alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} = \alpha_{ij} + \alpha_{jk} + \alpha_{k\sigma(j)}$. Whence obtain $\alpha_{k\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} - \alpha_{k\sigma(j)} = \alpha_{ij} + \alpha_{jk} - \alpha_{ik}$. Further we get

$$(\alpha_{k\sigma(i)} + \alpha_{k\sigma(k)}) + \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} - (\alpha_{k\sigma(j)} + \alpha_{k\sigma(k)}) = \alpha_{ij} + \alpha_{jk} - \alpha_{ik}.$$

Again represent $\alpha_{k\sigma(k)}$ as two summands as follows

$$(\alpha_{k\sigma(i)} + \alpha_{k\sigma(j)} + \alpha_{\sigma(j)\sigma(k)}) + \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} - (\alpha_{k\sigma(j)} + \alpha_{k\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(k)}) = \alpha_{ij} + \alpha_{jk} - \alpha_{ik}.$$

We have $\alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} + \alpha_{\sigma(j)\sigma(k)} - \alpha_{\sigma(i)\sigma(k)} = \alpha_{ij} + \alpha_{jk} - \alpha_{ik}$. □

3 Cyclic Gorenstein orders

Lemma 3.1 ([4]). *Let Λ be a reduced cyclic Gorenstein tiled order with an Exponent matrix $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ and Kirichenko permutation $\sigma = (12\ldots n)$. If $\alpha_{i1} = 0$ for all $i = 1, \ldots, n$ then $\alpha_{1j} = \alpha_{1,n+2-j}$ for $1 < j \leq n$.*

Proof. The lemma 2.1 gives that $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = \alpha_{\sigma^m(i)}\alpha_{\sigma^m(j)} + \alpha_{\sigma^m(j)}\alpha_{\sigma^m(i)}$ for an arbitrary natural m. For $i = 1$ we have

$$\alpha_{1j} + \alpha_{j1} = \alpha_{\sigma^m(1)}\alpha_{\sigma^m(j)} + \alpha_{\sigma^m(j)}\alpha_{\sigma^m(1)}.$$

As σ is a cyclic permutation then there exists an integer m such that $\sigma^m(j) = 1$. The equality $\sigma^m(j) \equiv j + m \pmod n$ yields $j + m = n + 1$. So $m = n + 1 - j$. This gives that $\sigma^m(1) = 1 + m = n + 2 - j$ and $\alpha_{1j} + \alpha_{j1} = \alpha_{n+2-j,1} + \alpha_{1,n+2-j}$. Now the lemma conditions yields $\alpha_{j1} = \alpha_{n+2-j,1} = 0$ whence $\alpha_{1j} = \alpha_{1,n+2-j}$. □

Proposition 3.1 ([4]). *Let $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_{1n}$ be an arbitrary set of real numbers. There exists the unique matrix (α_{ij}) such that these given numbers are elements of the first line of this matrix and equalities $\alpha_{kk} = \alpha_{k1} = 0$ and $\alpha_{ik} + \alpha_{ki+1} = \alpha_{ii+1}$ and $k = 1, \ldots, n; i = 1, \ldots, n-1$ hold.*

Proof. Let $\alpha_{k1} = 0$. Obtain other elements α_{km} of the matrix (α_{ij}) from the linear equations system $\alpha_{ik} + \alpha_{ki+1} = \alpha_{ii+1}$ $k = 1, \ldots, n; i = 1, \ldots, n-1$.

Really $\alpha_{kk+1} = \alpha_{k1} + \alpha_{1k+1} = \alpha_{1k+1}$ for $k < n$. The equality $\alpha_{1k} + \alpha_{k2} = \alpha_{12}$ gives that $\alpha_{k2} = \alpha_{12} - \alpha_{1k}$. As $\alpha_{k2} + \alpha_{2k+1} = \alpha_{kk+1} = \alpha_{1k+1}$ then either $\alpha_{2k+1} = \alpha_{1k+1} - \alpha_{k2} = \alpha_{1k+1} + \alpha_{1k} - \alpha_{12}$ or $\alpha_{2q} = \alpha_{1q} + \alpha_{1q-1} - \alpha_{12}$ for $q > 1$.

Further $\alpha_{2k} + \alpha_{k3} = \alpha_{23} = \alpha_{13}$ whence $\alpha_{k3} = \alpha_{13} - \alpha_{2k} = \alpha_{13} + \alpha_{12} - \alpha_{1k} - \alpha_{1k-1}$ for $k > 1$. From the equality $\alpha_{k3} + \alpha_{3k+1} = \alpha_{kk+1} = \alpha_{1k+1}$ find the α_{3k+1} as $\alpha_{3k+1} = \alpha_{1k+1} - \alpha_{k3} = \alpha_{1k+1} + \alpha_{1k} + \alpha_{1k-1} - \alpha_{13} - \alpha_{12}$ which is the same as $\alpha_{3q} = \alpha_{1q} + \alpha_{1q-1} + \alpha_{1q-2} - \alpha_{13} - \alpha_{12}$ for $q > 2$.

Assume that for $l < n$ elements of the l-th column α_{kl} for $k > l - 2$ can be represented through elements of the first line as follows

$$\alpha_{kl} = \sum_{j=2}^{l} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{l-2} \alpha_{1k-j}, \, k > l - 2,$$

and elements of the l-th line α_{lq} for $q > l - 1$ are represented through elements of the first line as follows

$$\alpha_{lq} = \sum_{j=0}^{l-1} \alpha_{1q-j} - \sum_{j=2}^{l} \alpha_{1j}, \, q > l - 1.$$

Find expressions for elements $l+1$-th column and $l+1$-th line through elements of the first line.

The equality $\alpha_{lk} + \alpha_{k,l+1} = \alpha_{l,l+1} = \alpha_{1,l+1}$ yields

$$\alpha_{k,l+1} = \alpha_{1,l+1} - \alpha_{lk} = \alpha_{1,l+1} - \left(\sum_{j=0}^{l-1} \alpha_{1k-j} - \sum_{j=2}^{l} \alpha_{1j}\right)$$
$$= \sum_{j=2}^{l+1} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{l-1} \alpha_{1,k-j} = \sum_{j=2}^{l+1} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{(l+1)-2} \alpha_{1,k-j}, k > l - 1 \quad \text{or} \quad k > (l+1) - 2.$$

Further have $\alpha_{k,l+1} + \alpha_{l+1,k+1} = \alpha_{k,k+1} = \alpha_{1,k+1}$. Whence,

$$\alpha_{l+1,k+1} = \alpha_{1,k+1} - \alpha_{k,l+1} = \alpha_{1,k+1} - \left(\sum_{j=2}^{l+1} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{(l+1)-2} \alpha_{1,k-j}\right)$$
$$= \sum_{j=0}^{(l+1)-1} \alpha_{1,(k+1)-j} - \sum_{j=2}^{l+1} \alpha_{1j}, \quad k+1 > (l+1) - 1 \quad \text{or}$$
$$\alpha_{l+1,q} = \sum_{j=0}^{(l+1)-1} \alpha_{1,q-j} - \sum_{j=2}^{l+1} \alpha_{1j}, \quad q > (l+1) - 1.$$

Whence with the use of induction by the number of a line and column obtain find the unknown elements of the matrix (α_{ij}). They are expressed with the elements of the first line with the following formulas

$$\alpha_{km} = \sum_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{m-2} \alpha_{1k-j} \text{ for } k > m - 2; \tag{3}$$

$$\alpha_{km} = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{1m-j} - \sum_{j=2}^{k} \alpha_{1j} \text{ for } m > k-1. \tag{4}$$

During this process we have considered all the equations $\alpha_{ik} + \alpha_{ki+1} = \alpha_{ii+1}$, $k = \overline{1,n}; i = \overline{1,n-1}$. It is obvious that the solution of the system of linear equations satisfies the equations of it. More the equation (3) yields

$$\alpha_{kk} = \sum_{j=2}^{k} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{k-2} \alpha_{1,k-j} = 0\,, k = 2, \dots, n,$$

and from the equation (4) we get

$$\alpha_{kk} = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{1,k-j} - \sum_{j=2}^{k} \alpha_{1j} = 0\,, k = 2, \dots, n.$$

□

The formula (3) yields

$$\begin{aligned} \alpha_{m-1,m} &= \sum_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{m-2} \alpha_{1,m-1-j} = \sum_{t=0}^{m-2} \alpha_{1,m-t} - \sum_{t=2}^{m-1} \alpha_{1t} - \alpha_{11} \\ &= \sum_{t=0}^{(m-1)-1} \alpha_{1,m-t} - \sum_{t=2}^{m-1} \alpha_{1t}, \quad m = \overline{3,n}. \end{aligned}$$

The last equality is the expression for $\alpha_{m-1,m}$ with the use of the formula (4).
This means that the former linear equations system is consistent.
Whence we have got the matrix (α_{ij}) whose elements can be calculated with formulas

$$\alpha_{km} = \begin{cases} 0, & \text{if } m = 1, \\ \sum\limits_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum\limits_{j=0}^{m-2} \alpha_{1k-j}, & \text{if } k \geq m > 1, \\ \sum\limits_{j=0}^{k-1} \alpha_{1m-j} - \sum\limits_{j=2}^{k} \alpha_{1j}, & \text{if } 1 < k < m, \\ \alpha_{1m}, & \text{if } k = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Corollary 3.1 ([4]). *Let (α_{ij}) be a matrix whose elements are calculated with (5) and $\alpha_{1j} = \alpha_{1,n+2-j}$ for $j = 2, \dots, n$. Then $\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$ for all $i, j = 1, \dots, n$ where $\sigma = (12 \dots n)$.*

Proof. As $\alpha_{1j} = \alpha_{1,n+2-j}$ then

$$\alpha_{nm} = \sum_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{m-2} \alpha_{1n-j} = \sum_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum_{i=2}^{m} \alpha_{1,n+2-i} = 0$$

and $\alpha_{nm} + \alpha_{m1} = \alpha_{n1} = 0$ for all m. Whence elements of the matrix (α_{ij}) satisfy the condition $\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$ for all $i, j = 1, \dots, n$ where $\sigma = (12 \dots n)$. □

Proposition 3.2 ([4]). *Let (α_{ij}) be a matrix whose elements satisfy the equality (5). Then for every triple or pairwise different numbers i, j, k there exist p, q such that $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} - \alpha_{ik} = \alpha_{pq}$.*

Proof. Rewrite the equalities (3)–(4) as follows

$$\begin{aligned} \alpha_{km} &= \sum_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{m-2} \alpha_{1k-j} = \sum_{t=2}^{m} \alpha_{1t} - \sum_{t=k-m+2}^{k} \alpha_{1t} \quad \text{for } k \geq m > 1, \\ \alpha_{km} &= \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{1m-j} - \sum_{j=2}^{k} \alpha_{1j} = \sum_{t=m-k+1}^{m} \alpha_{1t} - \sum_{t=2}^{k} \alpha_{1t} \quad \text{for } m \geq k > 1. \end{aligned}$$

Denote $S_{ijk} = \alpha_{ij} + \alpha_{jk} - \alpha_{ik}$.
It is easy to check that if the numbers i, j, k are pairwise different then the equality

$$\alpha_{pq} = \begin{cases} \alpha_{i-k+1,j-k+1}, & \text{if } \min(i,j,k) = k, \\ \alpha_{k-j,i-j+1}, & \text{if } \min(i,j,k) = j, \\ \alpha_{j-i,k-i}, & \text{if } \min(i,j,k) = i \end{cases}$$

holds. In the case when at least two indices coincide one obtain

$$\begin{aligned} S_{ijj} &= \alpha_{ij} + \alpha_{jj} - \alpha_{ij} = 0, \\ S_{iik} &= \alpha_{ii} + \alpha_{ik} - \alpha_{ik} = 0, \\ S_{iji} &= \alpha_{ij} + \alpha_{ji} - \alpha_{ii} = \alpha_{ij} + \alpha_{ji} = \alpha_{1,|i-j|+1} > 0. \end{aligned}$$

□

Corollary 3.2 ([4]). *A matrix (α_{ij}) with non negative elememts which satisfy the equalities (5) and $\alpha_{1j} = \alpha_{1,n+2-j}$ for all $2 \leq j \leq n$ is a Gorenstein reduced exponent matrix of a cyclic Gorenstein order with the Kirichenko permutation $\sigma = (1\,2\,\cdots\,n)$.*

Proposition 3.3 ([4]). *The exponent matrix (α_{ij}) of the cyclic reduced Gorenstein tiled order Λ with the Kirichenko permutation $\sigma = (1\,2\,\cdots\,n)$ such that $\alpha_{i1} = 0$ for $i = \overline{1,n}$ is symmetrical in the main diagonal.*

Proof. It is clear that the matrix (α_{ij}) is symmetrical in the second diagonal if $\alpha_{ij} = \alpha_{n+1-j,n+1-i}$. After the direct checking one may make sure that $\alpha_{km} - \alpha_{n+1-m,n+1-k} = 0$ for all k, m. □

Corollaries 3.1, 3.2 and the proposition 3.3 yield the following theorem which gives the whole description of the reduced cyclic Gorenstein tiled orders.

Theorem 4 ([4]). *Any cyclic reduced Gorenstein tiled order is isomorphic to a reduced order Λ with Kirichenko permutation $\sigma = (1\,2\,\cdots\,n)$ whose exponent matrix $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ has the following properties:*

1) all elements of the matrix (α_{ij}) can be expressed with the formulas (5) through $\left[\frac{n}{2}\right]$ natural parameters $\alpha_{12}, \dots, \alpha_{1\left[\frac{n}{2}\right]+1}$;

2) $\alpha_{1j} = \alpha_{1,n+2-j}$ for all j;

3) the matrix (α_{ij}) is symmetrical in the second diagonal.

Conversely each non negative integer valued matrix (α_{ij}) which satisfies the properties 1-3 from above such that $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ for $(i \neq j)$ is an exponent matrix of some cyclic reduced Gorenstein tiled order with the Kirichenko permutation $\sigma = (1\,2\,\cdots\,n)$.

The elements of the exponent matrix (α_{ij}) of the a cyclic reduced Gorenstein tiled order Λ with Kirichenko permutation $\sigma = (1\,2\,\cdots\,n)$ satisfy the equality

$$\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}}{n^2} = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n} \left(\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)}\right)}{2n^2} = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{i\sigma(i)}}{2n^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma(i)}}{2n}.$$

The value $t = \frac{\sum\limits_{i=1}^{|\langle\sigma\rangle|} \alpha_{i\sigma(i)}}{|\langle\sigma\rangle|}$ is much important in the studying of cyclic Gorenstein orders.

Theorem 5 ([11]). *Let Λ be a reduced cyclic Gorenstein tiled order with exponent matrix $\mathcal{E}(\Lambda)$ and Kirichenko permutation σ. An order Λ is isomorphic to an order Λ' whose exponent matrix is a linear combination of powers or a matrix of the Kirichenko permutation σ if and only if $\frac{1}{|\langle\sigma\rangle|} \cdot \sum\limits_{i} \alpha_{i\sigma(i)} = t$ is a natural number.*

Proof. We will assume that $\sigma = (1\,2\,\cdots\,n)$.

All cyclic Gorenstein tiled orders are described at the theorem 4. Elements of an exponent matrix of such order satisfy the equalities

$$\alpha_{km} = \begin{cases} 0, & \text{if } m = 1, \\ \sum\limits_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum\limits_{j=0}^{m-2} \alpha_{1k-j} & \text{if } k \geq m > 1, \\ \sum\limits_{j=0}^{k-1} \alpha_{1m-j} - \sum\limits_{j=2}^{k} \alpha_{1j} & \text{if } 1 < k < m, \\ \alpha_{1m} & \text{if } k = 1. \end{cases} \tag{6}$$

Let $\frac{1}{|\langle\sigma\rangle|} \cdot \sum\limits_{i} \alpha_{i\sigma(i)} = t$ be a natural number. Show that with the transformation of the first type the exponent matrix of the order Λ can be transformed to an exponent matrix with the necessary property. Let us do the transformations of the first type. Let us add the number x_k to all the elements of the k-th line and lets subtract if from all the elements of the k-th column. Then the equality $\alpha'_{km} = \alpha_{km} + x_k - x_m$ will appear. To find x_k we will need $\alpha'_{k\sigma(k)} = t$ for all k. Consider the linear equations system

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= t - \alpha_{12}, \\ x_2 - x_3 &= t - \alpha_{23}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} - x_n &= t - \alpha_{n-1n}, \\ x_n - x_1 &= t - \alpha_{n1}. \end{aligned}$$

It has a solution

$$\begin{aligned} x_2 &= \alpha_{12} - t + x_1, \\ x_3 &= \alpha_{12} + \alpha_{23} - 2t + x_1, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_k &= \alpha_{12} + \alpha_{23} + \cdots + \alpha_{k-1k} - (k-1)t + x_1, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \alpha_{12} + \alpha_{23} + \cdots + \alpha_{n-1n} - (n-1)t + x_1. \end{aligned} \tag{7}$$

That is why the exponent matrix $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ can be reduced with the transformations of the first type to the matrix$(\alpha'_{ij}) = \mathcal{E}(\Lambda')$ such that $\alpha'_{k\sigma(k)} = t$ for all k.

Now show that $\alpha'_{ij} = \alpha'_{\sigma(i)\sigma(j)}$ for alli, j. Really equalities $\alpha'_{i\sigma(i)} = t = \alpha'_{ij} + \alpha'_{j\sigma(i)}$ i $\alpha'_{j\sigma(j)} = t = \alpha'_{j\sigma(i)} + \alpha'_{\sigma(i)\sigma(j)}$ yield that $\alpha'_{ij} = \alpha'_{\sigma(i)\sigma(j)}$ for all i, j.

That is why $\mathcal{E}(\Lambda') = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha'_{1j} P_\sigma^{j-1}$ where $P_\sigma = \sum\limits_{j=1}^{n} e_{j\sigma(j)}$ and e_{ij} are matrix units.

The converse statement is obvious. □

4 GORENSTEIN ORDERS WITH PAIRWISE ISOMORPHIC SIMPLE CYCLES

The matrix transformations of two types change a sum of elements of a matrix. It is easy to see the following proposition.

Proposition 4.1 ([11]). *Let Λ and Λ' be two isomorphic reduced tiled order with correspond exponent matrices $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ and $\mathcal{E}(\Lambda') = (\alpha'_{ij})$ whose Kirichenko permutations are σ and σ' correspondingly. Then $\sum\limits_{i,j}^{n} \alpha_{ij} = \sum\limits_{i,j}^{n} \alpha'_{ij}$ and $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma(i)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha'_{i\sigma'(i)}$.*

Lemma 4.1 ([11]). *Let Λ be a reduced Gorenstein tiled order with correspond exponent matrix $\mathcal{E}(\Lambda)$ and Kirichenko permutation σ and let $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2$ be a decomposition of σ into the product of two disjoint cycles. Then*

$$\frac{\sum\limits_{i} \alpha_{i\sigma_1(i)}}{|<\sigma_1>|} = \frac{\sum\limits_{k} \alpha_{k\sigma_2(k)}}{|<\sigma_2>|}.$$

Proof. We can assume that $\sigma_1 = (1\,2\,\cdots\,n)$ and $\sigma_2 = (n+1\;n+2\,\cdots\,n+m)$ (we can reach this with the isomorphic second type transformations of lines and columns of the exponent matrix $\mathcal{E}(\Lambda)$). Then the exponent matrix $\mathcal{E}(\Lambda)$ will become of the form

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & \mathcal{E}_{12} \\ \mathcal{E}_{21} & \mathcal{E}_2 \end{pmatrix}$$

where $\mathcal{E}_1$ is an exponent matrix of a reduced cyclic tiled order with Kirichenko permutation σ_1 and $\mathcal{E}_2$ is an exponent matrix of a reduced cyclic tiled order with Kirichenko permutation σ_2. That is why $\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma_1(i)} = \alpha_{i\sigma_1(i)}$ for all $j = n+1, \ldots, n+m$, $i = 1, \ldots, n$ and $\alpha_{kl} + \alpha_{l\sigma_2(k)} = \alpha_{k\sigma_2(k)}$ for all $l = 1, \ldots, n$, $k = n+1, \ldots, n+m$. whence obtain

$$\begin{aligned} m \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma_1(i)} &= \sum_{j=n+1}^{n+m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma_1(i)} = \sum_{j=n+1}^{n+m} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma_1(i)}) \\ &= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=n+1}^{n+m} (\alpha_{kl} + \alpha_{l\sigma_2(k)}) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=n+1}^{n+m} \alpha_{k\sigma_2(k)} = n \cdot \sum_{k=n+1}^{n+m} \alpha_{k\sigma_2(k)}. \end{aligned}$$

Whence $m \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma_1(i)} = n \cdot \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} \alpha_{k\sigma_2(k)}$ i.e. $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma_1(i)}}{n} = \frac{\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} \alpha_{k\sigma_2(k)}}{m}$. □

Corollary 4.1 ([11]). *If n and m are pairwise simple then*

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{i\sigma_1(i)}}{n}=\frac{\sum\limits_{k=n+1}^{n+m}\alpha_{k\sigma_2(k)}}{m}=t$$

where t is a natural number.

Lemma 4.1 provides the sufficient condition for the possibility to construct the Gorenstein tiled order with the correspond exponent matrix with a given Kirichenko permutation σ which decomposes into independent cycles $\sigma_1,\dots,\sigma_s$ and two sided Piers decomposition of Λ has blocks $\Lambda_1,\dots,\Lambda_s$ on the main diagonal. The input data for this condition is a set of the cyclic tiled orders $\Lambda_1,\dots,\Lambda_s$ with the cyclic permutations $\sigma_1,\dots,\sigma_s$ correspondingly. Call this condition Ω and it is following

$$(\Omega)\qquad \frac{\sum\limits_{i}\alpha_{i\sigma_1(i)}}{|\langle\sigma_1\rangle|}=\dots=\frac{\sum\limits_{i}\alpha_{i\sigma_s(i)}}{|\langle\sigma_s\rangle|}.$$

Lemma 4.2 ([11]). *Let Λ be a reduced Gorenstein tiled order with correspond exponent matrix $\mathcal{E}=(\alpha_{ij})$ and Kirichenko permutation $\sigma=\sigma_1\cdot\sigma_2$ where $\sigma_1=(\,1\ \ 2\ \ \cdots\ \ n\,)$, $\sigma_2=(\,n+1\ \ n+2\ \ \cdots\ \ n+m\,)$ such that numbers n and m are piecewise simple. Then the order Λ is isomorphic to the order Λ' with an exponent matrix*

$$\mathcal{E}'=\begin{pmatrix}\mathcal{E}_1' & x_{12}U_{12}\\ x_{21}U_{21} & \mathcal{E}_2'\end{pmatrix}$$

where $\mathcal{E}_1'$, $\mathcal{E}_2'$ are exponent matrices or reduced cyclic Gorenstein orders with permutations $\sigma_1=(\,1\ \ 2\ \ \cdots\ \ n\,)$ and $\sigma_2=(\,n+1\ \ n+2\ \ \cdots\ \ n+m\,)$ which are linear combinations of powers of permutation matrices P_{σ_1}, P_{σ_2} correspondingly, U_{12}, U_{21} are such matrices that all their elements are equal to ones x_{12}, x_{21} are integers such that

$$x_{12}+x_{21}=t=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{i\sigma_1(i)}}{n}=\frac{\sum\limits_{k=n+1}^{n+m}\alpha_{k\sigma_2(k)}}{m}.$$

Proof. An exponent matrix of a Gorenstein tiled order whose Kirichenko permutation is a product of disjoint cycles has a following form

$$\mathcal{E}=\begin{pmatrix}\mathcal{E}_1 & \mathcal{E}_{12}\\ \mathcal{E}_{21} & \mathcal{E}_2\end{pmatrix}$$

where $\mathcal{E}_1=e\mathcal{E}e$, $e=e_{11}+\dots+e_{nn}$, $f=E-e$, $\mathcal{E}_2=f\mathcal{E}f$ are exponent matrices of cyclic Gorenstein orders with Kirichenko permutations σ_1,σ_2 correspondingly. As numbers n and m are pairwise simple then the corollary 4.1 gives that

$$t=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{i\sigma_1(i)}}{n}=\frac{\sum\limits_{k=n+1}^{n+m}\alpha_{k\sigma_2(k)}}{m}$$

is a natural number. Then according to the theorem 5 matrices $\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2$ can be reduced to matrices $\mathcal{E}_1'$ and $\mathcal{E}_2'$ with transformations of the first type. The last matrices are linear combinations of

permutational matrices P_{σ_1} and P_{σ_2} correspondingly and mire then this $\alpha_{i\sigma_1(i)}=\alpha_{k\sigma_2(k)}=t$ for all $i=1,\dots,n$ and $k=n+1,\dots,n+m$. The conditions to be Gorenstein matrices yields $\alpha_{ij}+\alpha_{j\sigma_1(i)}=\alpha_{i\sigma_1(i)}=t$ for all $i=1,\dots,n$, $j=n+1,\dots,n+m$ and $\alpha_{kl}+\alpha_{l\sigma_2(k)}=\alpha_{k\sigma_2(k)}=t$ for all $l=1,\dots,n$ and $k=n+1,\dots,n+m$. Whence for $j=k$ and $l=\sigma_1(i)$ obtain $\alpha_{ij}+\alpha_{j\sigma_1(i)}=\alpha_{j\sigma_1(i)}+\alpha_{\sigma_1(i)\sigma_2(j)}$ i.e. $\alpha_{ij}=\alpha_{\sigma_1(i)\sigma_2(j)}$. As lengthes of permutations σ_1 and σ_2 are pairwise simple then $\alpha_{ij}=\alpha_{1n+1}$ for all $i=1,\dots,n$, $j=n+1,\dots,n+m$. Denote $\alpha_{1n+1}=x_{12}$ a rational number. Then $\alpha_{kl}=\alpha_{n+11}=t-x_{12}$. Whence the exponent matrix $\mathcal{E}'$ will be of the following form

$$\mathcal{E}'=\begin{pmatrix}\mathcal{E}_1' & x_{12}U_{12}\\ x_{21}U_{21} & \mathcal{E}_2'\end{pmatrix}$$

where $\mathcal{E}_1'$ and $\mathcal{E}_2'$ are reduced exponent matrices of cyclic Gorenstein orders with permutations $\sigma_1=(\,1\ \ 2\ \ \cdots\ \ n\,)$ and $\sigma_2=(\,n+1\ \ n+2\ \ \cdots\ \ n+m\,)$ correspondingly which are linear combinations of powers of permutational matrices P_{σ_1}, P_{σ_2} correspondingly U_{12} and U_{21} are matrices whose all elements are equal to one. So,

$$x_{12}+x_{21}=t=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{i\sigma_1(i)}}{n}=\frac{\sum\limits_{k=n+1}^{n+m}\alpha_{k\sigma_2(k)}}{m}.$$

□

Theorem 6 ([11]). *Let Λ be a reduced Gorenstein tiled oreder with an exponent matrix $\mathcal{E}(\Lambda)=(\alpha_{ij})$ whose Kirichenko permutation σ is a product of cycles which do not intersect $\sigma=\sigma_1\cdots\sigma_m$ and whose lengthes are pairwise simple. Then the order Λ is isomorphic to an order Λ' with Kirichenko permutation $\sigma'=\sigma_1'\cdots\sigma_m'$ and exponent matrix $\mathcal{E}(\Lambda')=(\alpha_{ij}')$ of the form*

$$\begin{pmatrix}\mathcal{E}_1 & x_{12}U_{12} & \cdots & x_{1m}U_{1m}\\ x_{12}U_{21} & \mathcal{E}_2 & \cdots & x_{2m}U_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_{m1}U_{m1} & x_{m2}U_{m2} & \cdots & \mathcal{E}_m\end{pmatrix},$$

where

$$x_{ij}+x_{ji}=t=\frac{\sum\limits_{k=1}^{|<\sigma_i>|}\alpha_{k\sigma_i(k)}}{|<\sigma_i>|}$$

for all $i,j=1,\dots m$, $i\neq j$ and $x_{ij}+x_{js}\geq x_{is}$ for all pairwise different $i,j,s=1,\dots m$, $\mathcal{E}_k$ are exponent matrices of cyclic Gorenstein orders with Kirichenko permutations which are conjugate to those Kirichenko one σ_k' whici are linear combinations of permutational matrices $P_{\sigma_k'}$ $(k=1,\dots,m)$.

Proof. A Gorenstein tiled order Λ is isomorphic to an order Λ'' with Kirichenko permutation $\sigma'=\sigma_1'\cdots\sigma_m'$ where each permutation σ_k' acts on a set of natural numbers. Then the exponent matrix of the order Λ'' will be of the form

$$\mathcal{E}(\Lambda'')=\begin{pmatrix}\mathcal{E}_1'' & \mathcal{E}_{12}'' & \cdots & \mathcal{E}_{1m}''\\ \mathcal{E}_{21}'' & \mathcal{E}_2'' & \cdots & \mathcal{E}_{2m}''\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathcal{E}_{m1}'' & \mathcal{E}_{m2}'' & \cdots & \mathcal{E}_m''\end{pmatrix}.$$

As orders of permutations σ'_k are pairwise simple then

$$t=\frac{\sum\limits_{k=1}^{|<\sigma'_i>|}\alpha''_{k\sigma'_i(k)}}{|<\sigma'_i>|}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{|<\sigma_i>|}\alpha_{k\sigma_i(k)}}{|<\sigma_i>|}$$

for all $i=1,\dots m$ and t is a natural number. Whence exponent matrices $\mathcal{E}''_k$ with Kirichenko permutations σ'_k can be reduced to the linear combination of powers of permutational matrices $P_{\sigma'_k}$ with transformations of the first type.

For arbitrary i and j ($i\neq j$) consider a Gorenstein tiled order with a Kirichenko permutation $\sigma'_i\cdot\sigma'_j$ and an exponent matrix

$$\begin{pmatrix}\mathcal{E}''_i & \mathcal{E}''_{ij}\\ \mathcal{E}''_{ji} & \mathcal{E}''_j\end{pmatrix}.$$

According to the lemma 4.2 its exponent matrix can be reduced to the form

$$\begin{pmatrix}\mathcal{E}'_i & x_{ij}U_{ij}\\ x_{ji}U_{ji} & \mathcal{E}'_j\end{pmatrix},$$

were matrices $\mathcal{E}'_i$ and $\mathcal{E}'_j$ are linear combinations of powers of their permutational matrices. Whence the exponent matrix is of the form

$$\mathcal{E}(\Lambda')=\begin{pmatrix}\mathcal{E}_1 & x_{12}U_{12} & \cdots & x_{1m}U_{1m}\\ x_{12}U_{21} & \mathcal{E}_2 & \cdots & x_{2m}U_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_{m1}U_{m1} & x_{m2}U_{m2} & \cdots & \mathcal{E}_m\end{pmatrix}.$$

Inequalities $x_{ij}+x_{js}\geq x_{is}$ come from ring inequalities $\alpha_{ij}+\alpha_{jk}\geq\alpha_{ik}$. □

5 GORENSTEIN TILED ORDERS WITH MUTUALLY PRIME LENGTHES OF CYCLES

Let $\Lambda=\{\mathcal{O},\mathcal{E}(\Lambda)=(\alpha_{ij})\}$ be a reduced Gorenstein tiled order with Kirichenko permutation σ where $\sigma=\sigma_1\cdots\sigma_s$ is the decomposition of σ into the product of cycles, m_k is a length of the σ_k. We can assume that $\sigma_k=(\,g_k+1\ \ g_k+2\ \ \cdots\ \ g_k+m_k\,)$ (we can reach this with the transformations of the second type) where $g_k=\sum\limits_{j=1}^{k-1}m_j$ for $k>1$, $g_1=0$. Let $f_k=e_{g_k+1g_k+1}+e_{g_k+2g_k+2}+\cdots+e_{g_k+m_kg_k+m_k}$ and $1=f_1+\cdots+f_s$ be the ring unit of Λ into the sum of pair wise orthogonal idempotents. Two sided Piers decomposition of Λ has the following form

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \cdots & \Lambda_{1s}\\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \cdots & \Lambda_{2s}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \Lambda_{s1} & \Lambda_{s2} & \cdots & \Lambda_{ss}\end{pmatrix},$$

where Λ_{kk} is reduced cyclic tiled order with Kirichenko permutation $\sigma'=(\,1\ \ 2\ \ \cdots\ \ m_k\,)$. So the exponent matrix is of the form

$$\mathcal{E}=\begin{pmatrix}\mathcal{E}_{11} & \mathcal{E}_{12} & \cdots & \mathcal{E}_{1s}\\ \mathcal{E}_{21} & \mathcal{E}_{22} & \cdots & \mathcal{E}_{2s}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathcal{E} & \mathcal{E}_{s2} & \cdots & \mathcal{E}_{ss}\end{pmatrix},$$

where $\mathcal{E}_{kk}$ is an exponent matrix of cyclic Gorenstein tiled order Λ_{kk}. Write out the condition to be Gorenstein order for Λ in the matrix form as follows $\mathcal{E}+P_\sigma\mathcal{E}^T=\mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma(k)}\}U$ or

$$\begin{pmatrix}\mathcal{E}_{11} & \mathcal{E}_{12} & \cdots & \mathcal{E}_{1s}\\ \mathcal{E}_{21} & \mathcal{E}_{22} & \cdots & \mathcal{E}_{2s}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathcal{E}_{s1} & \mathcal{E}_{s2} & \cdots & \mathcal{E}_{ss}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}P_{\sigma'_1} & O & \cdots & O\\ O & P_{\sigma'_2} & \cdots & O\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ O & O & \cdots & P_{\sigma'_s}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathcal{E}^T_{11} & \mathcal{E}^T_{21} & \cdots & \mathcal{E}^T_{s1}\\ \mathcal{E}^T_{12} & \mathcal{E}^T_{22} & \cdots & \mathcal{E}^T_{s2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathcal{E}^T_{1s} & \mathcal{E}^T_{2s} & \cdots & \mathcal{E}^T_{ss}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\mathrm{diag}\{\alpha'_{k\sigma_1(k)}\} & O & \cdots & O\\ O & \mathrm{diag}\{\alpha'_{k\sigma_2(k)}\} & \cdots & O\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ O & O & \cdots & \mathrm{diag}\{\alpha'_{k\sigma_s(k)}\}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1s}\\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2s}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ U_{s1} & U_{s2} & \cdots & U_{ss}\end{pmatrix}.$$

Whence we get the following system of matrix equations

$$\begin{cases}\mathcal{E}_{jj}+P_{\sigma'_j}\mathcal{E}^T_{jj}=\mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma'_j(k)}\}U_{jj},\\ \mathcal{E}_{ij}+P_{\sigma'_i}\mathcal{E}^T_{ji}=\mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma'_i(k)}\}U_{ij},\\ \mathcal{E}_{ji}+P_{\sigma'_j}\mathcal{E}^T_{ij}=\mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma'_j(k)}\}U_{ji}.\end{cases}$$

Reduced cyclic Gorenstein orders are described at theorem 4. Elements of exponent matrix $\mathcal{E}$ of the cyclic reduced Gorenstein tiled order Λ with correspond Kirichenko permutation $\sigma=(12\cdots n)$ whose the first line is zero are expressed with the following formulas

$$\alpha_{km}=\begin{cases}0 & \text{if}\quad m=1,\\ \sum\limits_{j=2}^{m}\alpha_{1j}-\sum\limits_{j=0}^{m-2}\alpha_{1k-j} & \text{if}\quad k\geq m>1,\\ \sum\limits_{j=0}^{k-1}\alpha_{1m-j}-\sum\limits_{j=2}^{k}\alpha_{1j} & \text{if}\quad 1<k<m,\\ \alpha_{1m} & \text{if}\quad k=1,\end{cases}$$

and more then this $\alpha_{1j}=\alpha_{1n+2-j}$ for all j. The exponent matrix for a reduced tiled order does not contain two zero lines and does not contain two zero columns. Elements of the exponent matrix $\mathcal{E}$ of a cyclic reduced Gorenstein tiled order Λ with Kirichenko permutation $\sigma=(12\cdots n)$ and the arbitrary the first column can be expressed with the following formulas

$$\alpha'_{km}=\alpha_{km}+x_k-x_m.$$

More then this, elements of the block matrices $\mathcal{E}_{11},\mathcal{E}_{22},\dots,\mathcal{E}_{ss}$ satisfy the condition (Ω) i.e. the following equality

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{m_1}\alpha_{k\sigma'_1(k)}}{m_1}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m_2}\alpha_{k\sigma'_2(k)}}{m_2}=\dots=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m_s}\alpha_{k\sigma'_s(k)}}{m_s}$$

holds.

We have the following system of simultaneous equations for finding $\mathcal{E}_{ij}$

$$\begin{cases}\mathcal{E}_{ij}+P_{\sigma'_i}\mathcal{E}^T_{ji}=\mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma'_i(k)}\}U_{ij},\\ \mathcal{E}_{ji}+P_{\sigma'_j}\mathcal{E}^T_{ij}=\mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma'_j(k)}\}U_{ji}.\end{cases}\tag{8}$$

Whence, either

$$\mathcal{E}_{ij} + P_{\sigma_i'}\left(\mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma_j'(k)}\}U_{ji} - P_{\sigma_j'}\mathcal{E}_{ij}^T\right)^T = \mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma_i'(k)}\}U_{ij}$$

or

$$\mathcal{E}_{ij} - P_{\sigma_i'}\mathcal{E}_{ij}P_{\sigma_j'}^T = \mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma_i'(k)}\}U_{ij} - P_{\sigma_i'}^T U_{ij}\mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma_j'(k)}\}.$$

As permutational matrix just permutes either lines or columns when we multiply by it then the following is true

$$\mathcal{E}_{ij} - P_{\sigma_i'}\mathcal{E}_{ij}P_{\sigma_j'}^T = \mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma_i'(k)}\}U_{ij} - U_{ij}\mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma_j'(k)}\}. \tag{9}$$

The general solution non homogeneous equation equals to sum of the general solution of the homogeneous equation $\mathcal{E}_{ij} - P_{\sigma_i'}\mathcal{E}_{ij}P_{\sigma_j'}^T = 0$ and some partial solution of non homogeneous equation. Consider the solution of the homogeneous equation.

Lemma 5.1 ([12]). *Let $\sigma_1 = (1\,2\,\cdots\,n)$, $\sigma_2 = (1\,2\,\cdots\,m)$, $(n,m) = d$, $n = du$, $m = dv$. The solution of an equation $X - P_{\sigma_1}XP_{\sigma_2}^T = 0$ has the following block form $X = \begin{pmatrix} F & \cdots & F \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ F & \cdots & F \end{pmatrix} \in M_{u\times v}(F)$ where $F \in M_d(\mathbb{Z})$ and F is a linear combination of permutational matrix $P_\tau = \sum\limits_{k=1}^{d} e_{k\tau(k)}$, $\tau = (12\cdots d)$ powers with arbitrary coefficients.*

Proof. The equation $X = P_{\sigma_1}XP_{\sigma_2}^T$ can be represented in the form $x_{ij} = x_{\sigma_1(i)\sigma_2(j)}$. Whence $x_{ij} = x_{\sigma_1^k(i)\sigma_2^k(j)}$ for arbitrary integer k. Show that for arbitrary integers p and q such that $0 < i + pd \leqslant n$, $0 < j + qd \leqslant m$ the equality $x_{ij} = x_{i+pd,j+qd}$ holds.

For arbitrary integer k the following equalities hold $\sigma_1^k(i) \equiv i + k(\mathrm{mod}\ n)$, $\sigma_2^k(j) \equiv j + k(\mathrm{mod}\ m)$. As numbers u are v mutually prime then there exist natural numbers a and b such that $p - q = bv - au$. Put $k = pd + an + cnm = qd + bm + cnm$. Then $\sigma_1^k(i) \equiv i + k \equiv i + pd(\mathrm{mod}\ n)$, $\sigma_2^k(j) \equiv j + k \equiv j + qd(\mathrm{mod}\ m)$. This implies $x_{ij} = x_{i+pd,j+qd}$. The las means that the matrix X is decomposed to uv equal blocks F or the dimension d (u blocks are in the block line of X and v blocks in its block column). So, $X = \begin{pmatrix} F & \cdots & F \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ F & \cdots & F \end{pmatrix} \in M_{u\times v}(F)$. Now show that $x_{ij} = x_{\tau(i)\tau(j)}$ for $i,j \leqslant d$ where $\tau = (12\cdots d)$.

As $i,j < d$ then for $k = 1$ we have $x_{ij} = x_{\sigma_1^k(i)\sigma_2^k(d)} = x_{i+1,j+1} = x_{\tau(i)\tau(j)}$.

Let $i < d$, $j = d$. As numbers u and v are pairwise simple then $1 = \delta v - \gamma u$ for some integers δ and γ. Take $k = 1 + \gamma n + cnm = 1 - d + \delta m + cnm$. Then $\sigma_1^k(i) \equiv i + k \equiv i + 1 + \gamma n + cnm \equiv i + 1(\mathrm{mod}\ n)$, $\sigma_2^k(d) \equiv d + k \equiv d + 1 - d + \delta m + cnm \equiv 1(\mathrm{mod}\ m)$. Whence $x_{\tau(i)\tau(d)} = x_{i+1,1} = x_{\sigma_1^k(i)\sigma_2^k(d)} = x_{id}$.

In the same way for $i = d$ and $j < d$ take $k = 1 - d - \gamma n + cnm = 1 - \delta m + cnm$. Then $\sigma_1^k(d) \equiv d + k \equiv 1 - \gamma n + cnm \equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$, $\sigma_2^k(j) \equiv j + k \equiv j + 1 - \delta m + cnm \equiv j + 1(\mathrm{mod}\ m)$. Whence $x_{\tau(d)\tau(j)} = x_{1,j+1} = x_{\sigma_1^k(d)\sigma_2^k(j)} = x_{dj}$.

For $i = d$ $j = d$ state $k = 1 - d + cnm$. Then $\sigma_1^k(d) \equiv d + k \equiv d + 1 - d + cnm \equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$, $\sigma_2^k(d) \equiv d + k \equiv d + 1 - d + cnm \equiv 1(\mathrm{mod}\ m)$. Whence $x_{\tau(d)\tau(d)} = x_{1,1} = x_{\sigma_1^k(d)\sigma_2^k(d)} = x_{dd}$.

Whence $x_{ij} = x_{\tau(i)\tau(j)}$ for $i,j \leqslant d$. That is why $F = x_{11}E + x_{12}P_\tau + x_{13}P_\tau^2 + \cdots + x_{1d}P_\tau^{d-1}$. □

Proposition 5.1 ([12]). *Let $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ be a reduced Gorenstein tiled order with Kirichenko permutation σ, $\sigma = \sigma_1\cdots\sigma_s$ be a decomposition of σ into a product of cycles which do not intersect and their lengthes σ_k are mutually prime i.e. $GCF(|\langle\sigma_1\rangle|,\cdots,|\langle\sigma_s\rangle|) = 1$. Then $\frac{1}{|\langle\sigma_1\rangle|}\sum\limits_{i}^{\alpha_{i\sigma_1(i)}} = \cdots = \frac{1}{|\langle\sigma_s\rangle|}\sum\limits_{j}^{\alpha_{j\sigma_2(j)}} = t$ when t is a natural number.*

Proof. Let m_k be a length of a cycle σ_k, $Y_k = \sum\limits_i \alpha_{i\sigma_k(i)}$. As $(m_1,\ldots,m_s) = 1$ then there exist integers $a_1,\ldots,a_s$ such that $a_1 \quad m_1 + \ldots + a_s \quad m_s = 1$. According to the lemma 4.1 $\frac{Y_p}{m_p} = \frac{Y_q}{m_q}$ which is the same as $m_qY_p = m_pY_q$. Multiply this equality with a_q and obtain $a_qm_qY_p = a_qm_pY_q$. Whence $\sum\limits_{q\neq p} a_qm_qY_p = \sum\limits_{q\neq p} a_qm_pY_q$ which is $Y_p \cdot \sum\limits_{q\neq p} a_qm_q = m_p \cdot \sum\limits_{q\neq p} a_qY_q$. Taking into attention the equality $(m_1,\ldots,m_s) = 1$ get $Y_p \cdot (1 - a_pm_p) = m_p \cdot \sum\limits_{q\neq p} a_qY_q$. Numbers $1 - a_pm_p$ and m_p are mutually prime and that is why Y_p is divisible by m_p for all p. □

Theorem 7 ([12]). *Let $\Lambda = \{\mathcal{O},\ \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ be a reduced Gorenstein tiled order with Kirichenko permutation σ and let $\sigma = \sigma_1\cdots\sigma_s$ be a decomposition of σ to a product of cycles which do not intersect. Let m_k be a length of the cycle $\sigma_k = (g_k + 1\, g_k + 2 \ldots g_k + m_k)$ where $g_k = \sum\limits_{j=1}^{k-1} m_j$ for $k > 1$ and $g_1 = 0$. Let $d_{ij} = GCF(m_i, m_j)$ be a maximal common factor of numbers m_i, m_j and $GCF(m_1,\ldots,m_s) = 1$. Then the order Λ is isomorphic to an order Λ' with Kirichenko permutation $\sigma' = \sigma_1'\cdots\sigma_s'$ and the exponent matrix $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{11} & \mathcal{E}_{12} & \cdots & \mathcal{E}_{1s} \\ \mathcal{E}_{21} & \mathcal{E}_{22} & \cdots & \mathcal{E}_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{E}_{s1} & \mathcal{E}_{s2} & \cdots & \mathcal{E}_{ss} \end{pmatrix}$ where $\frac{1}{m_i}\sum\limits_{k=1}^{m_i} \alpha'_{k\sigma'(k)} = t \in \mathbb{N}$ for all $i = 1,\ldots s$. The matrix $\mathcal{E}_{kk}$ is a exponent matrix of a cyclic Gorenstein order with Kirichenko permutation $\sigma_k' = (1\,2\ldots m_k)$ and it is a linear combination of powers of an permutational matrix $P_{\sigma_k'}$ $(k = 1,\ldots,s)$. The matrix $\mathcal{E}_{kl} = \begin{pmatrix} F_{kl} & \cdots & F_{kl} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{kl} & \cdots & F_{kl} \end{pmatrix}$, $k \neq l$, is a $\frac{m_k}{d_{kl}} \times \frac{m_l}{d_{kl}}$ block matrix where F_{kl} is a square $d_{kl}\times d_{kl}$ matrix and it is a linear combination of powers of permutational matrix $P_{\tau_{kl}}$ with $\tau_{kl} = (1\,2\ldots d_{kl})$.*

Proof. According to the proposition 5.1 $\frac{1}{|\langle\sigma_1\rangle|}\sum\limits_{i}^{\alpha_{i\sigma_1(i)}} = \cdots = \frac{1}{|\langle\sigma_s\rangle|}\sum\limits_{j}^{\alpha_{j\sigma_2(j)}} = t$ where t is a natural number. Then each diagonal matrix $\mathcal{E}_{kk}$ can be reduced with the isomorphic transformations to a matrix $\mathcal{E}_{kk}'$ which is a linear combination of permutational matrix $P_{\sigma_k'}$ such that $\alpha_{i\sigma_k(i)} = t$ for i and k. Then the matrix equation $\mathcal{E}_{ij} - P_{\sigma_i'}\mathcal{E}_{ij}P_{\sigma_j'}^T = \mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma_i'(k)}\}U_{ij} - U_{ij}\mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma_j'(k)}\}$ for $\mathcal{E}_{ij}$ will get the form $\mathcal{E}_{ij} - P_{\sigma_i'}\mathcal{E}_{ij}P_{\sigma_j'}^T = 0$. With using the lemma 5.1 obtain the proposition of the theorem. □

Remark 5.1. *The theorem 7 describes the reduced Gorenstein tiled orders $\Lambda = \{\mathcal{O},\ \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ with the Kirichenko permutation σ where $\sigma = \sigma_1\cdots\sigma_s$ is the decomposition of σ into a product of cycles which do not intersect whose lengthes is mutually prime. Really this theorem describes also a part of those reduced Gorenstein tiled orders for which there is no any restrictions on cycles but the following "more strict" (Ω) condition holds:*

$$\frac{\sum_i \alpha_{i\sigma_1(i)}}{|\langle\sigma_1\rangle|} = \cdots = \frac{\sum_i \alpha_{i\sigma_s(i)}}{|\langle\sigma_s\rangle|} = t, \textit{ where } t \textit{ is a natural number.}$$

6 THE NUMBER OF INDEPENDENT PARAMETERS TO EXPRESS ALL ELEMENTS OF THE GORENSTEIN MATRIX

The general solution of non homogeneous equation (9) is a sum of a general solution of homogeneous equation $\mathcal{E}_{ij} - P_{\sigma_i'}\mathcal{E}_{ij}P_{\sigma_j'}^T = 0$ and the partial solution of non homogeneous solution. Consider the solution of the homogeneous equation.

Note that a partial solution of the non homogeneous equation depends on permutations σ_i', σ_j' and elements $\alpha_{k\sigma_i'}(k)$ $\alpha_{k\sigma_j'}(k)$ which belong to diagonal blocks $\mathcal{E}_{ii}$ $\mathcal{E}_{jj}$. The general solution of homogenous equation is independent on elements of diagonal blocks. That is why we can represent the matrix $\mathcal{E}$ as a sum $\mathcal{E} = A + B$ where $A = (A_{ij})$, $B = (B_{ij})$ are block $(s \times s)$ matrices and $A_{ii} = 0$ for all i, A_{ij} is a general solution of the homogeneous equation $B_{ii} = \mathcal{E}_{ii}$ for all i, B_{ij} is a partial solution of non homogenous solution.

According to the theorem 4 matrix $\mathcal{E}_{kk}$ depends on $[\frac{m_k}{2}]$ parameters. As they satisfy the (Ω)-condition then there are only

$$b = \left[\frac{m_1}{2}\right] + \left[\frac{m_2}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{m_s}{2}\right] - (s-1)$$

independent between them. So, elements od B can be expressed on b independent parameters.

Blocks A_{ij} and A_{ji} are solutions of the system $A_{ij} + P_{\sigma_i'}A_{ji}^T = 0$, $A_{ji} + P_{\sigma_j'}A_{ij}^T = 0$. That is why $A_{ji} = -P_{\sigma_j'}A_{ij}^T$ and elements A_{ij} and A_{ji} can be expressed with the same set of parameters.

According to the lemma 5.1 the solution of the equation is a block $(u \times v)$ matrix

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} F_{ij} & \cdots & F_{ij} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{ij} & \cdots & F_{ij} \end{pmatrix},$$

where $F_{ij} \in M_{d_{ij}}(\mathbb{Z})$, $d_{ij} = (m_i, m_j)$, $m_i = d_{ij}u$, $m_j = d_{ij}v$.

In this case the matrix F_{ij} is a linear combination of powers of permutational matrix $P_{\tau_{ij}}$ where $\tau_{ij} = (1\ 2\ \ldots\ d_{ij})$, i.e.

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^{d_{ij}} a_k^{(ij)}(P_{\tau_{ij}})^k.$$

Whence matrices $\mathcal{E}_{ij}$ and $\mathcal{E}_{ji}$ depend on d_{ij} parameters. Then matrix A depends on $a = \sum_{i<j} d_{ij}$ parameters. Whence we have got that $\mathcal{E}$ depends on $a + b = \sum_{k=1}^{s}[\frac{m_k}{2}] - (s-1) + \sum_{1\leq i<j\leq s}(m_i, m_j)$ parameters.

Equivalent transformation of the second type do not change values of elements of a matrix (they change only position of elements) and that is why the general quantity of parameters $a + b$ does not change.

Equivalent the first type transformations of the matrix $\mathcal{E}$ can be used either over the matrix A or over the matrix B. Diagonal blocks $\mathcal{E}_{ii}$ of the matrix B already are of the special form (the first column is zero) with the help of which they depend on the minimal quantity of parameters. Parameters $a_1^{(ij)}, \ldots, a_{d_{ij}}^{(ij)}$ are in each line of the matrix A_{ij} i.e. in each line of the i-th block band of the matrix A. Use the following the first type transformation. Subtract the integer t from all numbers of the i-th horizontal block band and add this t to all numbers of the i-th vertical block line

Under such transformation the form of diagonal blocks of $\mathcal{E}_{ii}$ will not be changed and so as diagonal blocks of B. The i-th block line and i-th block column will be consisted of new matrices $\bar{A}_{ij} = A_{ij} - tU_{ij}$, $\bar{A}_{ji} = A_{ji} + tU_{ji}$.

As $A_{ji} = -P_{\sigma_j'}A_{ij}^T$ then $\bar{A}_{ij} = -P_{\sigma_j'}A_{ij}^T + tU_{ji} = -P_{\sigma_j'}A_{ij}^T + tP_{\sigma_j'}U_{ji} = -P_{\sigma_j'}(A_{ij} - tU_{ij})^T$. In this case $\bar{F}_{ij} = F_{ij} - tU_{ij} = \sum_{k=1}^{d_{ij}}(a_k^{(ij)} - t)(P_{\tau_{ij}})^k$.

Denote $\bar{a}_k^{(ij)} = a_k^{(ij)} - t$, $k = 1, 2, \ldots, d_{ij}$. The new matrices $\bar{A}_{ij}$ and $\bar{A}_{ji}$ depends also on d_{ij} parameters $\bar{a}_1^{(ij)}, \ldots, \bar{a}_{d_{ij}}^{(ij)}$. If consider $t = a_k^{(ij)}$ for some k then $\bar{a}_k^{(ij)} = 0$ and the number of parameters for express all the elements of the matrix $\bar{A}_{ij}$ will decrease by one.

The matrix A contains s horizontal and vertical block lines and columns. Subtract $t_i = a_1^{(i1)}$ from all elements of i-th horizontal band $(i = 2, \ldots, s)$ and add it to all elements of the i-th vertical block band. Then the number of parameters of A will decrease by $s - 1$.

Whence the number of parameters to express all the elements of a reduced Gorenstein exponent matrix with equals to

$$\sum_{k=1}^{s}\left[\frac{m_k}{2}\right] - 2(s-1) + \sum_{1\leq i<j\leq s}(m_i, m_j)$$

parameters.

This result coincides with one which is got at [13]. Nevertheless we state the elements of matrix which can be considered as independent.

This result is obtained at [13] in a following way. Consider an exponent matrix $A = (a_{ij})$ with correspond Kirichenko permutation σ which can be decomposed to independent cycles of lengthes $l_1, \ldots, l_q$ and q is the number of cycles.

Denote $x_k = a_{k,1}$ for every k, $2 \leq k \leq n$. For arbitrary r, $0 < r < q$ and for every k, $n_r + 2 \leq k \leq n$ denote also $z_{k,r} = a_{n_r+1,k}$. Consider the variables x_k and $z_{k,r}$ as parameters.

After this one can get formulas which are analogous for (5). Nevertheless parameters are not independent and there are some linear equalities which contain parameters. Finding the defect of the linear equations system which is consisted of these equations gives the quantity of independent parameters.

This system of equations and correspond quantity is found in [13].

7 THE SUFFICIENCY OF THE CONDITION (Ω) FOR CONSTRUCTING THE EXPONENT MATRIX WITH GIVEN CYCLIC GORENSTEIN MATRICES ON THE MAIN BLOCK DIAGONAL

Consider an exponent matrix $\mathcal{E}_1$ with the permutation $\sigma_1 = (1\,2\ \ldots\ m)$ and an exponent matrix $\mathcal{E}_2$ with the permutation $\sigma_2 = (1\,2\ \ldots\ n)$. Let the condition (Ω)

$$\frac{\sum_i \alpha_{i\sigma_1(i)}}{|\langle\sigma_1\rangle|} = \frac{\sum_i \alpha_{i\sigma_s(i)}}{|\langle\sigma_s\rangle|}$$

holds. We will show that there exists a reduced Gorenstein exponent matrix

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & \mathcal{E}_{12} \\ \mathcal{E}_{21} & \mathcal{E}_2 \end{pmatrix}$$

with correspond permutation $\sigma = \sigma_1\sigma_2'$, where $\sigma_2' = (m+1\; m+2\; \dots\; m+n)$.

From the above the matrix $\mathcal{E}_{12}$ is f dimension $m \times n$ and the matrix $\mathcal{E}_{21}$ is of dimension $n \times m$.

We have an equations system using which may find the matrices $\mathcal{E}_{12}$ and $\mathcal{E}_{21}$

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{12} + P_{\sigma_1'}\mathcal{E}_{21}^T = \mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma_1'(k)}\}U_{12}, \\ \mathcal{E}_{21} + P_{\sigma_2'}\mathcal{E}_{12}^T = \mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma_2'(k)}\}U_{21}. \end{cases}$$

This system can be rewritten as

$$\left(\begin{array}{cc|c} E & A & \bar{a} \\ B & E & \bar{b} \end{array} \right), \tag{10}$$

where $E, A, B \in M_{mn}(\mathbb{Z})$, $A = (A_{ij})$ is a block $m \times n$ matrix, $B = (B_{ij})$ is a block $n \times m$ matrix A_{ij} are matrices of the dimension $n \times m$, B_{ij} are matrices of the dimension $m \times n$ such that $A_{ij} = e_{j\sigma_1(i)}$, $B_{ij} = e_{j\sigma_2(i)}$, $\bar{a} = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \vdots \\ \bar{a}_m \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_n \end{pmatrix}$, $\bar{a}_i = \alpha_{i\sigma_1(i)}\bar{u}_n$ and $\bar{a}_i \in \mathbb{Z}^n$, $\bar{b}_i = \alpha_{i\sigma_2(i)}\bar{u}_m \in \mathbb{Z}^m$.

Multiply the first block line of the system with $(-B)$ and add it to the second line. After this obtain

$$\left(\begin{array}{cc|c} E & A & \bar{a} \\ 0 & E - BA & \bar{b} - B\bar{a} \end{array} \right). \tag{11}$$

Here $BA = C$ is a block $n \times n$ matrix where $C_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{m} B_{ik}A_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{m} e_{k\sigma_2(i)}e_{j\sigma_1(k)}$. More exactly $C_{ij} = 0$ for $j \neq \sigma_2(i)$ and $C_{i\sigma_2(i)} = \sum\limits_{k=1}^{m} e_{k\sigma_2(i)}e_{\sigma_2(i)\sigma_1(k)} = \sum\limits_{k=1}^{m} e_{k\sigma_1(k)} = P_{\sigma_1}$.

The linear equations (10) is consistent if and only if the linear equations system (11) is also consistent.

Consider the linear equation system $\left(E - BA \mid \bar{b} - B\bar{a} \right)$, where $\bar{b} - B\bar{a} = \bar{c} = \begin{pmatrix} \bar{c}_1 \\ \vdots \\ \bar{c}_n \end{pmatrix}$,

$$\bar{c}_i = \bar{b}_i - \sum_{k=1}^{m} B_{ik}\bar{a}_k = \alpha_{i\sigma_2(i)}\bar{u}_m - \sum_{k=1}^{m} e_{k\sigma_2(i)}\alpha_{k\sigma_1(k)}\bar{u}_n.$$

As $e_{k\sigma_2(i)}\bar{u}_n = \bar{e}_k = \Big(\underbrace{0\,0\,\dots\,0}_{k-1}\,1\,0\,\dots\,0\Big)^T$, then

$$\bar{c}_i = \alpha_{i\sigma_2(i)}\bar{u}_m - \sum_{k=1}^{m} \alpha_{k\sigma_1(k)}\bar{e}_k = \begin{pmatrix} \alpha_{i\sigma_2(i)} - \alpha_{1\sigma_1(1)} \\ \alpha_{i\sigma_2(i)} - \alpha_{2\sigma_1(2)} \\ \vdots \\ \alpha_{i\sigma_2(i)} - \alpha_{m\sigma_1(m)} \end{pmatrix}.$$

The system $\left(E - BA \mid \bar{b} - B\bar{a} \right)$ appears to be of the form

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} E & -P_{\sigma_1} & & & & & \bar{c}_1 \\ & E & -P_{\sigma_1} & & & & \bar{c}_2 \\ & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & & & E & -P_{\sigma_1} & \bar{c}_{m-1} \\ -P_{\sigma_1} & & & & & E & \bar{c}_m \end{array} \right). \tag{12}$$

Multiply the k-th block of the system by $P_{\sigma_1}^k$, $k = \overline{1, m-1}$ and add it to the last one. After this obtain

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} E & -P_{\sigma_1} & & & & & \bar{c}_1 \\ & E & -P_{\sigma_1} & & & & \bar{c}_2 \\ & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & & & E & -P_{\sigma_1} & \bar{c}_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & E - P_{\sigma_1}^n & P_{\sigma_1}\bar{c}_1 + P_{\sigma_1}^2\bar{c}_2 + \dots + P_{\sigma_1}^{n-1}\bar{c}_{n-1} + \bar{c}_n \end{array} \right).$$

The linear equations system (12) is consistent if and only if so as

$$\left(E - P_{\sigma_1}^n \mid P_{\sigma_1}\bar{c}_1 + P_{\sigma_1}^2\bar{c}_2 + \dots + P_{\sigma_1}^{m-1}\bar{c}_{m-1} + \bar{c}_m \right). \tag{13}$$

Consider the square matrix $E - P_{\sigma_1}^n \in M_m(\mathbb{Z})$. Let $m = du$, $n = dv$ where $d = (n, m)$, $(u, v) = 1$. We can consider that $m > n$.

Then

$$E - P_{\sigma_1}^n = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{E\quad E\quad \ddots\quad E}}^{v} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} E & & & & -E & & & \\ & E & & & & -E & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & E & & & & -E \\ \hline -E & & & & E & & & \\ & -E & & & & E & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & -E & & & & E \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} u - v \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

where $E \in M_d(\mathbb{Z})$.

Add all the block lines of the matrix $E - P_{\sigma_1}^n$ to the last one and obtain the zero block line. Whence $rank(E - P_{\sigma_1}^n) \leq n - d$. From another hand the lemma 5.1 yields that the solution X of the equation $X - P_{\sigma_1}XP_{\sigma_2} = 0$ belongs on d parameters. This lets to find the matrix defect of X as $def\, X = d$.

Whence $def\,(E - P_{\sigma_1}^n) = d$ and $rank\,(E - P_{\sigma_1}^n) = m - d$.

Divide the system (13) into u bands of the width d and add all the lines to the last one. Then the last band will become zero.

The system (13) is consistent if and only if the last band of the expanded linear equations system is equal to zero.

So we get $P_{\sigma_1^k} = \sum\limits_{k=1}^{m} e_{i\sigma_1^k(i)}$. Then

$$P_{\sigma_1^k} \cdot \bar{c}_k = \sum_{k=1}^{m} e_{i\sigma_1^k(i)} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{i\sigma_2(i)} - \alpha_{1\sigma_1(1)} \\ \alpha_{i\sigma_2(i)} - \alpha_{2\sigma_1(2)} \\ \vdots \\ \alpha_{i\sigma_2(i)} - \alpha_{m\sigma_1(m)} \end{pmatrix} = \alpha_{i\sigma_2(i)}\bar{u}_m - \begin{pmatrix} \alpha_{k+1\,\sigma_1(k+1)} \\ \vdots \\ \alpha_{n\,\sigma_1(n)} \\ \alpha_{1\,\sigma_1(1)} \\ \vdots \\ \alpha_{k\,\sigma_1(k)} \end{pmatrix}.$$

$$\bar{c}_n + P_{\sigma_1}\bar{c}_1 + P_{\sigma_1}^2\bar{c}_2 + \ldots + P_{\sigma_1}^{n-1}\bar{c}_{n-1} = (\alpha_{1\sigma_2(1)} + \ldots + \alpha_{n\sigma_2(n)})\bar{u}_n$$
$$- \left(\begin{pmatrix} \alpha_{1\sigma_1(1)} \\ \alpha_{2\sigma_1(2)} \\ \vdots \\ \alpha_{m\sigma_1(m)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{2\sigma_1(2)} \\ \vdots \\ \alpha_{m\sigma_1(m)} \\ \alpha_{1\sigma_1(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{3\sigma_1(3)} \\ \vdots \\ \alpha_{1\sigma_1(1)} \\ \alpha_{2\sigma_1(2)} \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} \alpha_{n\sigma_1(n)} \\ \vdots \\ \alpha_{m\sigma_1(m)} \\ \alpha_{1\sigma_1(1)} \\ \vdots \\ \alpha_{n-1\sigma_1(n-1)} \end{pmatrix} \right).$$

Add all the bands of the width d to the last one and obtain

$$u \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k\sigma_2(k)}\bar{u}_d - v \sum_{k=1}^{m} \alpha_{k\sigma_2(k)}\bar{u}_d = \bar{0}_d.$$

Whence the system (13) is consistent. Then the former equations system is also consistent. This means that the condition (Ω) is sufficient for constructing an exponent matrix with given cyclic Gorenstein matrices on the main block diagonal.

REFERENCES

[1] Tarsy R.B. *Global dimension of orders*. Trans. Amer. Math. Soc. 1970, **151** (1), 335–340.

[2] Kirichenko V.V. *O quasy Frobenious Rings and Gorenstein Orders*. Works Math. Inst. Sci. Acad USSR 1978, **148**, 168–174.

[3] Kirichenko V.V. *On semiperfect rings of injective dimension one*. São Paulo J. Math. Sci. 2007, **1** (1), 111–132.

[4] Kirichenko V.V., Zhuravlev V.M., Chernousova Zh.T. *Cyclic Gorenstein oreders*. Reports of Nation. Acad. of Sci. of Ukraine, Ser: Math., Nature and Tech. Sci. 2003, **4**, 7–11.

[5] Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V. Algebras, Rings and Modules. In: Mathematics and Its Applications, 1 (575). Kluwer Acad. Publish., 2004.

[6] Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V. Algebras, Rings and Modules. In: Mathematics and Its Applications, 2 (586). Springer, Dordrecht, 2007.

[7] Zavadskii A.G., Kirichenko V.V. *Torsion-free modules over primary rings*. J. Soviet Math. 1979, **11** (4), 598–612. doi:10.1007/BF01087094 (translation of Zap. Nauch. Seminar. Leningrad. Otdel. Mat. Steklov. Inst. (LOMI) 1976, **57**, 100–116. (in Russian))

[8] Tuganbaev A.A. Semidistributive modules and rings. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

[9] Kirichenko V.V., Khibina M.A. *Semi-perfect semi-distributive rings*. Infinite Groups and Related Algebraic Topics, Institute of Mathematics NAS Ukraine, 1993, 457–480.

[10] Zhuravlev V.M. *Permutations which determine the ideals of a Gorenstein order*. Bull. Kyiv Taras Shevchenko Univ., Ser: Phis. and Math. Sci. 2002, **3**, 23–27.

[11] Zhuravlev V.N., Zelensky A.V. *On one class of Gorenstein tiled oreders*. Bull. Gomel State F. Skorina Univ. 2006, **3**, 147–154.

[12] Zhuravlev V.M., Zhuravlev D.V. *On exponent matrices of Gorenstein orders*. Bull. Kyiv Taras Shevchenko Univ. Ser: Phis. and Math. Sci. 2006, **4**, 18–22.

[13] Plakhotnyk M. *On the dimension of Kirichenko space*. Algebra Discrete Math. 2006, **2**, 87–126.

Received 16.10.2014

Кириченко В., Хибіна М., Мащенко Л., Плахотник М., Журавльов В. *Горенштейнові черепичні порядки* // Карпатські матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 260–281.

Розглядаються горенштейнові черепичні порядки. Доводиться, що необхідна умова для побудови горенштейнового черепичного порядку, у якого на головній блочній діагоналі стоять задані циклічні горенштейнові черепичні порядки, є і достатньою.

Ключові слова і фрази: горенштейновий черепичний порядок, матриця показників, підстановка Кириченка.

Кириченко В., Хибина М., Мащенко Л., Плахотник М., Журавлёв В. *Горенштейновы черепичные порядки* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 260–281.

Рассматриваются горенштейновы черепичные порядки. Доказывается, что необходимое условие для построения горенштейнова черепичного порядка, у которого на главной блочной диагонали стоят заданные циклические горенштейновы порядки, является и достаточным.

Ключевые слова и фразы: горенштейнов черепичный порядок, матрица показателей, подстановка Кириченка.

ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, 6 (2), 282–299
doi:10.15330/cmp.6.2.282-299

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.282–299

KUZ A.M., PTASHNYK B.YO.

PROBLEM FOR HYPERBOLIC SYSTEM OF EQUATIONS HAVING CONSTANT COEFFICIENTS WITH INTEGRAL CONDITIONS WITH RESPECT TO THE TIME VARIABLE

In a domain specified in the form of a Cartesian product of a segment $[0, T]$ and the space $\mathbb{R}^p$, we study a problem with integral conditions with respect to the time variable for hyperbolic system with constant coefficients in a class of almost periodic functions in the space variables. A criterion for the unique solvability of this problem and sufficient conditions for the existence of its solution are established. To solve the problem of small denominators arising in the construction of solutions of the posed problem, we use the metric approach.

Key words and phrases: integral conditions, small denominators, Lebesgue measure, almost periodic function, hyperbolic system.

Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 3b Naukova str., 79060, Lviv, Ukraine
E-mail: kuz.anton87@gmail.com (Kuz A.M.), ptashnyk@lms.lviv.ua (Ptashnyk B.Yo.)

INTRODUCTION

Problems with integral conditions with respect to a chosen variable for partial differential equations (PDE s) have become an important area of investigation in recent years (second half of the XX century). Their study driven by a need for constructing a general theory of boundary value problems for such equations, as well as those problems occur in the mathematical simulation of various physical phenomena in the case when it is impossible to directly determine some physical quantities, but the mean values of these quantities are known. Such problems, in general, are ill-posed and their solvability in some cases is related to the problem of small denominators.

Problems with integral conditions for PDE s are studied by many authors (see [1,7,9,13] and the references there), however these problems were investigated insufficient for systems of such equations. Among research works devoted to the study of problems with integral conditions for systems of PDE s are worth noting these [6,10,11]. In particular, in [5] author investigate the problem with integral conditions with respect to the time variable in p-dimensional layer for the first order system of PDE s in a class of finite smooth functions with exponential growth for spatial variables. Correct solvability of the problem with integral conditions with respect to the chosen variable and 2π-periodical conditions for other variables to the composite type system of PDE s was established in [6] and [10]. The paper [11] deals with the problem with integral conditions with respect to the time variable (in the form of consecutive moments

УДК 517.95+511.2
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K35, 35B15, 35B30.
The work is supported by the State Fund for Fundamental Research of Ukraine (project № 54.1/027)

of the required function) for the linear first order system of evolution PDE s with deviating argument.

In the present paper we study a correct solvability of the problem with more general conditions with respect to the time variable, including an integral conditions in the form of moments of arbitrary order of the required functions and the Dirichlet-type conditions as special cases, for the high order hyperbolic system of PDE s with constant coefficients in a class of almost periodic functions in spatial variables in p-dimensional layer.

We use the following notations: $i = \sqrt{-1}$, $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $dx = dx_1 \cdots dx_p$; $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \cdots + |k_p|$; $\hat{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^{p+1}$, $|\hat{s}| = s_0 + s_1 + \cdots + s_p$, $|\hat{s}|^* = 2s_0 + s_1 + \cdots + s_p$; $\mu_k = \left(\mu_{k_1}, \ldots, \mu_{k_p}\right) \in \mathbb{R}^p$, $\|\mu_k\|^2 = \mu_{k_1}^2 + \cdots + \mu_{k_p}^2$, $|\mu_k| = |\mu_{k_1}| + \cdots + \left|\mu_{k_p}\right|$, $(\mu_k, x) = \mu_{k_1}x_1 + \cdots + \mu_{k_p}x_p$; S_q is the symmetric group of permutations of first q natural numbers; ρ_ω is the number of inversions in the permutation $\omega = (i_1, \ldots, i_q) \in S_q$; $D^p = (0, T) \times \mathbb{R}^p$; $\mathbf{I}_m$ is the $m \times m$ identity matrix, C_q^r is the number of all combinations of q elements by r; C_j, $j = 1, 2, \ldots$, are positive values, independent of k and μ_k, $[a]$ is an integer part of a real number a.

1 STATEMENT OF THE PROBLEM

In the domain D^p we consider the problem of finding almost periodic with respect to x solution of the problem

$$L\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \frac{\partial}{\partial x}\right)[\vec{u}] := \sum_{|\hat{s}|^* = 2n} \mathbf{A}_{\hat{s}} \frac{\partial^{2n}\vec{u}(t,x)}{\partial t^{2s_0} \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}} = \vec{0}, \quad (t,x) \in D^p, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} U_j[\vec{u}] &:= \alpha_j \left.\frac{\partial^{2(j-1)}\vec{u}}{\partial t^{2(j-1)}}\right|_{t=0} + \beta_j \int_0^T t^{r_j}\vec{u}(t,x)dt = \vec{\varphi}_j(x), \quad x \in \mathbb{R}^p, \\ U_{n+j}[\vec{u}] &:= \alpha_{n+j} \left.\frac{\partial^{2(j-1)}\vec{u}}{\partial t^{2(j-1)}}\right|_{t=T} + \beta_{n+j} \int_0^T t^{r_{n+j}}\vec{u}(t,x)dt = \vec{\varphi}_{n+j}(x), \quad x \in \mathbb{R}^p, \end{aligned} \tag{2}$$

where $j \in \{1, \ldots, n\}$; $\mathbf{A}_{\hat{s}} = \left\|a_{q,l}^{\hat{s}}\right\|_{l,q=1}^m$, $a_{q,l}^{\hat{s}} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{A}_{(n,0,\ldots,0)} = \mathbf{I}_m$; $\alpha_l, \beta_l \in \mathbb{R}$, $\alpha_l^2 + \beta_l^2 \neq 0$, $r_l \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \ldots, 2n\}$, $0 \leqslant r_1 < r_2 < \ldots < r_{2n}$; $\vec{u}(t,x) = \operatorname{col}\left(u^1(t,x), \ldots, u^m(t,x)\right)$, vector-functions $\vec{\varphi}_l(x) = \operatorname{col}\left(\varphi_l^1(x), \ldots, \varphi_l^m(x)\right)$, $l \in \{1, \ldots, 2n\}$, are almost periodic [2] with respect to x with given spectrum

$$M_p := \left\{\mu_k \in \mathbb{R}^p : \mu_{-k} = -\mu_k,\ \mu_{\vec{0}} = \vec{0},\ d_1|k|^{\theta_1} \leqslant |\mu_k| \leqslant d_2|k|^{\theta_2}, k \in \mathbb{Z}^p\right\},$$

where $0 < d_1 \leqslant d_2$, $0 < \theta_1 \leqslant \theta_2$, and are expanded in Fourier series

$$\vec{\varphi}_l(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \vec{\varphi}_{lk} \exp\left(i\mu_k, x\right), \quad \vec{\varphi}_{lk} = \operatorname{col}\left(\varphi_{lk}^1, \ldots, \varphi_{lk}^m\right), \quad l \in \{1, \ldots, 2n\}, \tag{3}$$

where $\vec{\varphi}_{lk} = \lim\limits_{H \to \infty} \frac{1}{H^p} \int\limits_{[0,H]^p} \vec{\varphi}_l(x) \exp\left(-i\mu_k, x\right) dx$.

We assume that the system (1) is hyperbolic by Petrovsky in narrow sense, that is, for each vector $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_p) \in \mathbb{R}^p \setminus \{\vec{0}\}$ the roots $\gamma_j(\eta)$, $j \in \{1, \dots, 2nm\}$, of the characteristic equation

$$\det L\left(\gamma^2, \eta\right) := \det \left\| \sum_{|\hat{s}|^*=2n} \mathbf{A}_{\hat{s}} \gamma^{2s_0} \eta_1^{s_1} \cdots \eta_p^{s_p} \right\| = 0, \tag{4}$$

which corresponds to the system (1), are real and different, and therefore (driven by the appearance of the system (1)) are different from zero.

At investigation of the problem (1), (2) we will use the following spaces of almost periodic functions with respect to x with the spectrum M_p:

$H^{\alpha}_{M_p} := H^{\alpha}(M_p; \mathbb{R}^p)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, is the space obtained by closure of space of finite trigonometric polynomials of the form $v(x) = \sum_{|k| \leqslant N} v_k \exp(i\mu_k, x)$, $\mu_k \in M_p$, according to the norm function given by [15]

$$\left\| v; H^{\alpha}_{M_p} \right\| = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} |v_k|^2 (1 + |\mu_k|)^{2\alpha} \right)^{1/2}.$$

$\vec{H}^{\alpha}_{M_p,m}$ is the space of vector functions $\vec{v}(x) = \mathrm{col}\left(v^1(x), \dots, v^m(x)\right)$ such that $v^q(x) \in H^{\alpha}_{M_p}$, $q \in \{1, \dots, m\}$, with the following norm

$$\left\| \vec{v}; \vec{H}^{\alpha}_{M_p,m} \right\| = \sum_{q=1}^{m} \left\| v^q; H^{\alpha}_{M_p} \right\|.$$

$\bar{C}^h([0,T], H^{\alpha}_{M_p})$, $h \in \mathbb{Z}_+$, is the space of vector functions $\vec{u}(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \vec{u}_k(t) \exp(i\mu_k, x)$, $\mu_k \in M_p$, $\vec{u}_k(t) = \mathrm{col}(u^1_k(t), \dots, u^m_k(t))$, such, that for any fixed point $t \in [0,T]$ all derivatives $\partial^j \vec{u}(t,\cdot)/\partial t^j = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \vec{u}^{(j)}_k(t) \exp(i\mu_k, x)$, $j \in \{0, 1, \dots, h\}$, belong to the space $\vec{H}^{\alpha}_{M_p,m}$ and are continuous with respect to the t according to the norm of this space,

$$\begin{aligned} \left\| \vec{u}; \bar{C}^h([0,T], H^{\alpha}_{M_p}) \right\| &= \sum_{j=0}^{h} \max_{t \in [0,T]} \left\| \frac{\partial^j \vec{u}}{\partial t^j}; \vec{H}^{\alpha}_{M_p,m} \right\| \\ &= \sum_{j=0}^{h} \sum_{q=1}^{m} \max_{t \in [0,T]} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \left| \frac{d^j u^q_k(t)}{dt^j} \right|^2 (1 + |\mu_k|)^{2\alpha} \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{5}$$

$\bar{C}^h_{M_p,m}(\bar{D}^p)$ is the space of vector functions $\vec{u}(t,x) = \mathrm{col}(u^1(t,x), \dots, u^m(t,x))$, which are h-times continuously differentiable in $\bar{D}^p$ with respect to all variables and almost periodic for x with the spectrum M_p uniformly by $t \in [0,T]$, with norm given by formula

$$\left\| \vec{u}; \bar{C}^h_{M_p,m}(\bar{D}^p) \right\| = \sum_{q=1}^{m} \sum_{0 \leqslant |\hat{s}| \leqslant h} \max_{t \in [0,T]} \sup_{x \in \mathbb{R}^p} \left| \frac{\partial^{|\hat{s}|} u^q(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}} \right|;$$

$\bar{C}^h_{M_p,m}(\mathbb{R}^p)$ is the subspace of vector functions from $\bar{C}^h_{M_p,m}(\bar{D}^p)$, independent of t.

If $\alpha > p/(2\theta_1)$, then such embeddings are valid (see [3] and the references given there):

$$\vec{H}^{q+\alpha}_{M_p,m} \subset \bar{C}^q_{M_p,m}(\mathbb{R}^p), \quad \bar{C}^q([0,T], H^{q+\alpha}_{M_p}) \subset \bar{C}^q_{M_p,m}(\bar{D}^p), \quad q \in \mathbb{Z}_+. \tag{6}$$

2 UNIQUENESS OF THE SOLUTION

Almost periodic with respect to x with the spectrum M_p solution of the problem (1), (2) we seek in the form of the vector series

$$\vec{u}(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \vec{u}_k(t) \exp(i\mu_k, x), \quad \mu_k \in M_p. \tag{7}$$

After substituting series (3), (7) into the system (1) and conditions (2), we receive that the each of functions $\vec{u}_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, is a solution of this problem:

$$L\left(\frac{d^2}{dt^2}, i\mu_k\right) \vec{u}_k(t) := \sum_{|\hat{s}|^*=2n} i^{|s|} \mathbf{A}_{\hat{s}} \mu_{k_1}^{s_1} \cdots \mu_{k_p}^{s_p} \frac{d^{2s_0}}{dt^{2s_0}} \vec{u}_k(t) = \vec{0}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} U_j[\vec{u}_k] &:= \alpha_j \frac{d^{2(j-1)} \vec{u}_k(0)}{dt^{2(j-1)}} + \beta_j \int_0^T t^{r_j} \vec{u}_k(t)\,dt = \vec{\varphi}_{jk}, \\ U_{n+j}[\vec{u}] &:= \alpha_{n+j} \frac{d^{2(j-1)} \vec{u}_k(T)}{dt^{2(j-1)}} + \beta_{n+j} \int_0^T t^{r_{n+j}} \vec{u}_k(t)\,dt = \vec{\varphi}_{n+j,k}, \quad j \in \{1, \dots, n\}, \end{aligned} \tag{9}$$

If $k = \vec{0}$ ($\mu_{\vec{0}} = \vec{0}$), the system (8) has the form

$$L\left(\frac{d^2}{dt^2}, \vec{0}\right) \vec{u}_{\vec{0}}(t) := \mathbf{I}_m \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} \vec{u}_{\vec{0}}(t) = \vec{0},$$

and so, each component $u^q_{\vec{0}}(t)$, $q \in \{1, \dots, m\}$, of the solution $\vec{u}_{\vec{0}}(t) = \mathrm{col}\left(u^1_{\vec{0}}(t), \dots, u^m_{\vec{0}}(t)\right)$ of the problem (8), (9) is a solution of this problem for scalar differential equation:

$$\frac{d^{2n}}{dt^{2n}} u^q_{\vec{0}}(t) = 0, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} U_j[u^q_{\vec{0}}] &:= \alpha_j \frac{d^{2(j-1)} u^q_{\vec{0}}(0)}{dt^{2(j-1)}} + \beta_j \int_0^T t^{r_j} u^q_{\vec{0}}(t)\,dt = \varphi^q_{j,\vec{0}}, \\ U_{n+j}[u^q_{\vec{0}}] &:= \alpha_{n+j} \frac{d^{2(j-1)} u^q_{\vec{0}}(T)}{dt^{2(j-1)}} + \beta_{n+j} \int_0^T t^{r_{n+j}} u^q_{\vec{0}}(t)\,dt = \varphi^q_{n+j,\vec{0}}, \quad j \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned} \tag{11}$$

The characteristic determinant $\Delta(\vec{0}, T)$ of the problem (10), (11) for each $q \in \{1, \dots, m\}$ has the form

$$\Delta(\vec{0}, T) = \begin{vmatrix} \alpha_1 S^0_1(0) + \beta_1 \dfrac{T^{r_1+1}}{r_1+1} & \dots & \alpha_1 S^0_{2n}(0) + \beta_1 \dfrac{T^{r_1+2n}}{r_1+2n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_n S^{2(n-1)}_1(0) + \beta_n \dfrac{T^{r_n+1}}{r_n+1} & \dots & \alpha_n S^{2(n-1)}_{2n}(0) + \beta_n \dfrac{T^{r_n+2n}}{r_n+2n} \\ \alpha_{n+1} S^0_1(T) + \beta_{n+1} \dfrac{T^{r_{n+1}+1}}{r_{n+1}+1} & \dots & \alpha_{n+1} S^0_{n+1}(T) + \beta_{n+1} \dfrac{T^{r_{n+1}+2n}}{r_{n+1}+2n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{2n} S^{2(n-1)}_1(T) + \beta_{2n} \dfrac{T^{r_{2n}+1}}{r_{2n}+1} & \dots & \alpha_{2n} S^{2(n-1)}_{2n}(T) + \beta_{2n} \dfrac{T^{r_{2n}+2n}}{r_{2n}+2n} \end{vmatrix},$$

where

$$S_j^{2(l-1)}(z) = \begin{cases} 0, & j < 2l-1, \\ \dfrac{(j-1)!}{(j-2l+1)!} z^{j-2l+1}, & j \geqslant 2l-1, \end{cases} \quad j \in \{1,\dots,2n\},\ l \in \{1,\dots,n\}.$$

If condition $\Delta(\vec{0},T) \neq 0$ holds true, the unique solution of the problem (10), (11) always exists for each $q \in \{1,\dots,m\}$. These solutions are expressed by formulas

$$u_{\vec{0}}^q(t) = \sum_{l,j=1}^{2n} \frac{\Delta_{lj}(\vec{0},T)}{\Delta(\vec{0},T)} \varphi_{l,\vec{0}}^q t^{j-1}, \quad q \in \{1,\dots,m\}, \tag{12}$$

where by $\Delta_{lj}(\vec{0},T)$ we denote the cofactor of the entry in the l-th row and j-th column in the determinant $\Delta(\vec{0},T)$.

Remark 1. *If $\Delta(\vec{0},T) = 0$, then the homogeneous problem corresponding to the problem* (10), (11), *has nontrivial solution $u_{\vec{0}}^*(t) = \operatorname{col}\left(\tilde{u}_{\vec{0}}^1(t),\dots,\tilde{u}_{\vec{0}}^m(t)\right)$, where $\tilde{u}_{\vec{0}}^q(t) = \sum_{j=1}^{2n} C_{jq} t^{j-1}$, $q \in \{1,\dots,m\}$, and coefficients C_{jq}, $j \in \{1,\dots,2n\}$, are solutions of system of linear algebraic equations*

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{2n} C_{jq}\left(\alpha_l S_j^{2(l-1)}(0) + \beta_l \dfrac{T^{r_l+j}}{r_l+j}\right) = \varphi_{l,\vec{0}}^q, \\ \sum\limits_{j=1}^{2n} C_{jq}\left(\alpha_{n+l} S_j^{2(l-1)}(T) + \beta_{n+l} \dfrac{T^{r_{n+l}+j}}{r_{n+l}+j}\right) = \varphi_{n+l,\vec{0}}^q, \quad l \in \{1,\dots,n\}. \end{cases}$$

Now we consider the problem (8), (9) for all $\mu_k \in M_p \setminus \{\vec{0}\}$. The characteristic equation corresponding to the system of ordinary differential equations (8), may be expressed in the form

$$\det L\left(\gamma^2, i\mu_k\right) := \sum_{\omega \in S_m} (-1)^{p_\omega} \prod_{q=1}^{m} \left(\sum_{|s|+2s_0=2n} i^{|s|} a_{i_q,q}^{\hat{s}} \gamma^{2s_0} \mu_{k_1}^{s_1} \cdots \mu_{k_p}^{s_p} \right) = 0. \tag{13}$$

Obviously, that roots γ_{jk} of the equation (13) are defined by formulas

$$\gamma_{jk} = i\,\gamma_j(\mu_k), \quad j \in \{1,\dots,2nm\}. \tag{14}$$

In (14) by $\gamma_j(\mu_k)$, $j \in \{1,\dots,2nm\}$, we denote roots of the equation (4) at $\eta = \mu_k$, $\mu_k \in M_p \setminus \{\vec{0}\}$; moreover $\gamma_{nm+q,k} = -\gamma_{qk}$, $q \in \{1,\dots,nm\}$, and following estimates hold [4]:

$$|\gamma_{jk}| \leqslant C_1(1+|\mu_k|), \ j \in \{1,\dots,2nm\}, \ \mu_k \in M_p \setminus \{\vec{0}\}, \ C_1 = (2nm)^p \max_{\substack{|\hat{s}|^*=2n \\ 1\leqslant q,l \leqslant m}} \{a_{q,l}^{\hat{s}}\}. \tag{15}$$

The fundamental system of solutions of the system of equations (8) is as follows (see [14, p. 116]):

$$\left\{\vec{u}_{jk}(t) = \vec{h}_{jk}\exp(\gamma_{jk}t),\ j \in \{1,\dots,2nm\}\right\}, \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}, \tag{16}$$

where by

$$\vec{h}_{jk} = \operatorname{col}(\vec{h}_{jk}^1,\dots,\vec{h}_{jk}^m), \quad j \in \{1,\dots,2nm\}, \tag{17}$$

we denote some nonzero column of the matrix $L^*(\gamma_{jk}^2, i\mu_k)$ which is adjugate matrix of the matrix $L(\gamma_{jk}^2, i\mu_k)$. Obviously, that $\vec{h}_{nm+j,k} = \vec{h}_{jk}$, $j \in \{1,\dots,nm\}$.

Solution of the problem (8), (9) may be expressed by the formula

$$\vec{u}_k(t) = \sum_{j=1}^{2nm} C_{jk}\vec{h}_{jk}\exp(\gamma_{jk}t), \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\},$$

where constants C_{jk}, $j \in \{1,\dots,2nm\}$, are defined from this system of linear algebraic equations

$$\sum_{j=1}^{2nm} C_{jk}\left(\alpha_l P_j^l + \beta_l I_l(\gamma_{jk})\right)\vec{h}_{jk} = \vec{\varphi}_{lk}, \quad l \in \{1,\dots,2n\}, \tag{18}$$

where for all $l \in \{1,\dots,2n\}$.

$$P_j^l = \begin{cases} \gamma_{jk}^{2(l-1)}, & 1 \leqslant l \leqslant n, \\ \gamma_{jk}^{2(l-n-1)}\exp(\gamma_{jk}T), & n+1 \leqslant l \leqslant 2n, \end{cases} \quad j \in \{1,\dots,2nm\}, \tag{19}$$

$$I_l(z) = \int_0^T t^{r_l}\exp(zt)dt = \frac{(-1)^{r_l} r_l!}{z^{r_l+1}} + \sum_{q=1}^{r_l+1} \frac{(-1)^{q+1} r_l!}{(r_l-q+1)!}\frac{T^{r_l-q+1}}{z^q}\exp(zT). \tag{20}$$

The determinant of the system of equations (18) matches with the characteristic determinant $\Delta(\mu_k,T)$, $\mu_k \in M_p \setminus \{\vec{0}\}$, of the problem (8), (9) and has the form

$$\Delta(\mu_k,T) = \det\|U_q[\vec{h}_{jk}\exp(\gamma_{jk}t)]\|_{j=1,\dots,2nm}^{q=1,\dots,2n}$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{h}_{1k}\left(\alpha_1 P_1^1 + \beta_1 I_1(\gamma_{1k})\right) & \dots & \vec{h}_{2nm,k}\left(\alpha_1 P_{2nm}^1 + \beta_1 I_1(\gamma_{2nm,k})\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{h}_{1k}\left(\alpha_{2n} P_1^{2n} + \beta_{2n} I_{2n}(\gamma_{1k})\right) & \dots & \vec{h}_{2nm,k}\left(\alpha_{2n} P_{2nm}^{2n} + \beta_{2n} I_{2n}(\gamma_{2nm,k})\right) \end{vmatrix}.$$

The problem (8), (9) can not have (see [16]) two different solutions if and only if $\Delta(\mu_k,T) \neq 0$, $\mu_k \in M_p \setminus \{\vec{0}\}$.

Theorem 1. *For the uniqueness of a solution of the problem* (1), (2) *in the scale of spaces $\tilde{C}^{2n}([0,T],H_{M_p}^\alpha)$ it is necessary and sufficient that the following condition be satisfied*

$$\forall \mu_k \in M_p \qquad \Delta(\mu_k,T) \neq 0. \tag{21}$$

Proof. Necessity. Suppose that for some $\mu_{k^0} \in M_p$ $\Delta(\mu_{k^0},T) = 0$ holds. If $k^0 = \vec{0}$, then homogeneous problem, corresponding to the problem (8), (9) at $k = \vec{0}$, has nontrivial solution $u_{\vec{0}}^*(t)$ (see Remark 1). If $k^0 \neq \vec{0}$, then exist nontrivial solutions $\vec{u}_{k^0}(t) = \sum_{j=1}^{2nm} C_{j,k^0}\vec{h}_{j,k^0}\exp(\gamma_{j,k^0}t)$ of the homogeneous problem, corresponding to the problem (8), (9), where C_{j,k^0}, $j \in \{1,\dots,2nm\}$, are defined from homogeneous system of equation, corresponding to the system (18) at $k = k^0$. Therefore the homogeneous problem, corresponding to the problem (1), (2), has nontrivial solutions $u_{\vec{0}}^*(t)$ or $\vec{u}(t,x) = \vec{u}_{k^0}\exp(i\mu_{k^0},x)$, $k^0 \neq \vec{0}$, and if solution to the problem (1), (2) exists, it won't be unique.

Sufficiency. Let the condition (21) holds true. Suppose to the contrary that there exist two different solutions $\vec{u}_1(t,x)$, $\vec{u}_2(t,x)$ of the problem (1), (2) from the space $\tilde{C}^{2n}([0,T],H_{M_p}^\alpha)$.

Then the function $\vec{w}(t,x) = \vec{u}_2(t,x) - \vec{u}_1(t,x)$, which belongs to the space $\tilde{C}^{2n}([0,T], H^{\alpha}_{M_p})$, is the solution to the homogeneous problem, corresponding to the problem (1), (2). Moreover, functions $\vec{w}(t,x)$, $L[\vec{w}]$, $U_j[\vec{w}]$, $j \in \{1,\dots,2n\}$, are almost periodic with respect to x with spectrum M_p and expand into Fourier series of the form (7). The Fourier series of functions $L[\vec{w}]$ and $U_j[\vec{w}]$, $j \in \{1,\dots,2n\}$, match with the series obtained by applying operators L and U_j, $j \in \{1,\dots,2n\}$, to the Fourier series of the vector function $\vec{w}(t,x)$ respectively. Each of the Fourier coefficients $\vec{w}_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, of the function $\vec{w}(t,x)$ is the solution of homogeneous problem, corresponding to the problem (8), (9). Because $\Delta(\mu_k, T) \neq 0$ for all $\mu_k \in M_p$, then homogeneous problem, corresponding to the problem (8), (9), has only trivial solution for all $\mu_k \in M_p$ and therefore $\vec{w}_k(t) = 0$, $t \in [0,T]$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Hence, on the basis of Parseval equality we obtain that $\vec{w}(t,x) = 0$ in the space $\tilde{C}^{2n}([0,T], H^{\alpha}_{M_p})$, i.e. $\vec{u}_1(t,x) = \vec{u}_2(t,x)$. □

3 Existence of the solution

Let condition (21) holds true. Then for each $\mu_k \in M_p$ the unique solution $\vec{u}_k(t) \in C^{2n}([0,T])$ of the problem (8), (9) exists and the formal solution $\vec{u}(t,x)$ of the problem (1), (2) may be expressed in the form

$$\vec{u}(t,x) = u_{\vec{0}}(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}} \left(\sum_{j=1}^{2nm} C_{jk} \vec{h}_{jk} \exp(\gamma_{jk} t) \right) \exp(i\mu_k, x), \tag{22}$$

in which

$$C_{jk} = \sum_{q=1}^{m} \sum_{l=1}^{2n} \frac{\Delta_{m(l-1)+q,j}(\mu_k, T)}{\Delta(\mu_k, T)} \varphi^q_{lk}, \quad j \in \{1,\dots,2nm\}, \tag{23}$$

where by $\Delta_{m(l-1)+q,j}(\mu_k, T)$ we denote the cofactor of the entry in the $(m(l-1)+q)$-th row and j-th column in determinant $\Delta(\mu_k, T)$ and components of vector $u_{\vec{0}}(t)$ are defined by formulas (12).

While proving the existence of a solution of the problem (1), (2) in the scale of spaces $\tilde{C}^{2n}([0,T], H^{\alpha}_{M_p})$ we will need following lemmas.

We also denote

$$C_2 := C^{2n}_{2n+p+1} C_1 \max_{\substack{|\vec{s}|^*=2n \\ 1 \leqslant q,l \leqslant m}} \{a^{\vec{s}}_{q,l}\}, \quad C_3 = (m-1)!(C_2)^{m-1},$$

$$C_4 = C_3 \max_{1 \leqslant l \leqslant 2n} \left\{ |\alpha_l| (C_1)^{2(n-1)}, |\beta_l| T^{r_l+1}/(r_l+1) \right\}, \quad C_5 = (2nm-1)!(C_4)^{2nm}.$$

Lemma 1. *For components of vectors* (17) *such estimates hold true*

$$|h^q_{jk}| \leqslant C_3 (1+|\mu_k|)^{2n(m-1)}, \quad q \in \{1,\dots,m\}, j \in \{1,\dots,nm\}, \quad \mu_k \in M_p \setminus \{\vec{0}\}.$$

Proof. By $\lambda_{ql}(\gamma_{jk})$, $q,l \in \{1,\dots,m\}$, we denote the element in the q-th row and l-th column in the matrix $L(\gamma^2_{jk}, i\mu_k)$, $j \in \{1,\dots,nm\}$. Note that $\lambda_{ql}(\gamma_{jk}) = \sum_{|\vec{s}|^*=2n} i^{|s|} a^{\vec{s}}_{q,l} \gamma^{2s_0}_{jk} \mu^{s_1}_{k_1} \cdots \mu^{s_p}_{k_p}$ and following estimates hold

$$|\lambda_{ql}(\gamma_{jk})| \leqslant C_2 (1+|\mu_k|)^{2n}, \quad q,l \in \{1,\dots,m\}, j \in \{1,\dots,nm\}. \tag{24}$$

Now we fix a column with number $l = l^*$ in the matrix $L(\gamma^2_{jk}, i\mu_k)$. Then components h^q_{jk} of vector $\vec{h}_{jk}$ are cofactors of elements $\lambda_{q,l^*}(\gamma_{jk})$, $q \in \{1,\dots,m\}$, in matrix $L(\gamma^2_{jk}, i\mu_k)$ respectively. They may be expressed in form

$$h^q_{jk} = \sum_{\omega \in S_{m-1}} (-1)^{\rho_\omega} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq l^*, i_l \neq q}}^{m} \lambda_{i_l,l}(\gamma_{jk}), \quad q \in \{1,\dots,m\}, \quad j \in \{1,\dots,nm\}. \tag{25}$$

Based on (24) and (25) we obtain that

$$|h^q_{jk}| \leqslant (m-1)! \prod_{l=1, l \neq l^*}^{m} |\lambda_{ll}(\gamma_{jk})| \leqslant C_3 (1+|\mu_k|)^{2n(m-1)}, \quad j \in \{1,\dots,nm\}, \quad q \in \{1,\dots,m\}.$$

The lemma is proved. □

By $\psi(\alpha)$ we denote the function of discrete argument, defined on the set $\{\alpha_1,\dots,\alpha_{2n}\}$ as follows:

$$\psi(\alpha_j) := 0, \quad \alpha_j = 0, \; j \in \{1,\dots,2n\}; \quad \psi(\alpha_l) = \psi(\alpha_{n+l}) = 2(l-1), \quad \alpha_l \neq 0, \; l \in \{1,\dots,n\}.$$

Lemma 2. *For cofactors $\Delta_{m(l-1)+q,j}(\mu_k, T)$, $q \in \{1,\dots,m\}$, $l \in \{1,\dots,2n\}$, $j \in \{1,\dots,2nm\}$, of the determinant $\Delta(\mu_k, T)$, $\mu_k \in M_p \setminus \{\vec{0}\}$, such estimates hold true*

$$|\Delta_{m(l-1)+q,j}(\mu_k, T)| \leqslant C_5 (1+|\mu_k|)^{2n(m-1)(2nm-1)+\Psi_l}, \qquad \Psi_l = m \sum_{j=1}^{2n} \psi(\alpha_j) - \psi(\alpha_l).$$

Proof. At first we hold some auxiliary estimates. On basis of formulas (19) and (20) we receive inequalities

$$\left| P^{n+l}_j \right| < \left| P^l_j \right| \leqslant (1+|\mu_k|)^{2(l-1)}, \quad l \in \{1,\dots,n\}, j \in \{1,\dots,2nm\}, \; t \in [0,T], \tag{26}$$

$$|I_l(\gamma_{jk})| \leqslant \int_0^T \left| t^{r_l} \exp(\gamma_{jk} t) \right| dt \leqslant \frac{T^{r_l+1}}{r_l+1}, \quad l \in \{1,\dots,2n\}, j \in \{1,\dots,nm\}. \tag{27}$$

By $\delta_{rj}(\mu_k) := h^q_{jk}(\alpha_l P^l_j + \beta_l I_l(\gamma_{jk}))$ we denote the element on the entry of r-th row, $r = m(l-1)+q$, $l \in \{1,\dots,2n\}$, $q \in \{1,\dots,m\}$ and j-th column, $j \in \{1,\dots,2nm\}$ in the determinant $\Delta(\mu_k, T)$. On basis of formulas (26), (27) and Lemma 1 we obtain that

$$|\delta_{rj}(\mu_k)| < |h^q_{jk}| \left(|\alpha_l| \left| P^l_j \right| + |\beta_l| \, |I_l(\gamma_{jk})| \right) < C_4 (1+|\mu_k|)^{2n(m-1)+\psi(\alpha_l)}. \tag{28}$$

Cofactors $\Delta_{m(l-1)+q,j}(\mu_k, T)$, $l = \{1,\dots,2n\}$, $q \in \{1,\dots,m\}$, $j \in \{1,\dots,2nm\}$, may be expressed by formulas

$$\Delta_{m(l-1)+q,j}(\mu_k, T) = \sum_{\omega \in S_{2nm-1}} (-1)^{\rho_\omega} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq m(l-1)+q \\ i_r \neq j}}^{2nm} \delta_{r,i_r}(\mu_k). \tag{29}$$

On basis of (28), (29) we receive that

$$|\Delta_{m(l-1)+q,j}(\mu_k, T)| \leqslant (2nm-1)! \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq m(l-1)+q}}^{2nm} |\delta_{r,r}(\mu_k)| \leqslant C_5 (1+|\mu_k|)^{2n(m-1)(2nm-1)+\Psi_l},$$

where $l = \{1,\dots,2n\}$, $s \in \{1,\dots,m\}$, $j \in \{1,\dots,2nm\}$. The lemma is proved. □

The series (22), in general, is divergent because of the expression $|\Delta(\mu_k,T)|$, being different from zero, can take arbitrarily small values for an infinite number (for some subsequence) of vectors $\mu_k \in M_p$.

Theorem 2. *Let condition (21) holds true and there exists a constant $\eta > 0$ such that for all (except for finite number of) vectors $\mu_k \in M_p$ such inequality holds*

$$|\Delta(\mu_k,T)| > (1+|\mu_k|)^{-\eta}. \tag{30}$$

If $\vec{\varphi}_l(x) \in \bar{H}^{\xi_l}_{M_p,m}$, $\xi_l = \alpha + 2n(2nm(m-1)+1) + \eta + \Psi_l$, $l \in \{1,\dots,2n\}$, then there exists a solution of the problem (1), (2) from the space $\bar{C}^{2n}\left([0,T],H^{\alpha}_{M_p}\right)$ which depends continuously on the functions $\vec{\varphi}_l(x)$, $l \in \{1,\dots,2n\}$. This solution is given by formula (22).

Proof. On basis of formulas (5) and (22) we obtain estimate

$$\left\|\vec{u};\bar{C}^{2n}([0,T],H^{\alpha}_{M_p})\right\| = \sum_{q=1}^{m}\sum_{r=0}^{2n}\max_{t\in[0,T]}\left(\left|\frac{d^r u^q_{\vec{0}}(t)}{dt^r}\right|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{\vec{0}\}}\left|\frac{d^r u^q_k(t)}{dt^r}\right|^2(1+|\mu_k|)^{2\alpha}\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \sum_{q=1}^{m}\sum_{r=0}^{2n}\left(\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^r u^q_{\vec{0}}(t)}{dt^r}\right|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{\vec{0}\}}\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^r u^q_k(t)}{dt^r}\right|^2(1+|\mu_k|)^{2\alpha}\right)^{1/2}, \tag{31}$$

in which $u^q_{\vec{0}}(t)$, $q \in \{1,\dots,m\}$, are defined by formulas (12), and

$$u^q_k(t) = \sum_{j=1}^{2nm} C_{jk} h^q_{jk}\exp(\gamma_{jk}t), \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}, \tag{32}$$

where h^q_{jk}, $s \in \{1,\dots,m\}$, are components of the corresponding vector (17). Constants C_{jk}, $j \in \{1,\dots,2nm\}$, are defined by formulas (23).

From formulas (12) it follows that

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^r}{dt^r}u^q_{\vec{0}}(t)\right|^2 \leqslant C_6\sum_{j=1}^{2n}\left|\varphi^q_{j,\vec{0}}\right|^2, \quad s \in \{1,\dots,m\}, \tag{33}$$

where constant C_6 depends on T and α_l,β_l,r_l, $l \in \{1,\dots,2n\}$.

On basis of (15), (23), (32) and Lemma 1 we obtain that

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^r u^s_k(t)}{dt^r}\right| \leqslant C_7\sum_{j=1}^{2nm}\sum_{q=1}^{m}\sum_{l=1}^{2n}\frac{\left|\Delta_{m(l-1)+q,j}(\mu_k,T)\right|}{|\Delta(\mu_k,T)|}\left|\varphi^q_{lk}\right|(1+|\mu_k|)^{2n(m-1)+r}, \tag{34}$$

where $r \in \{0,1,\dots,2n\}$ and $C_7 = C_3(C_1)^{2n}$.

Taking into account (30), (34) and Lemma 2, we obtain following estimates:

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^r u^s_k(t)}{dt^r}\right| \leqslant 2nmC_5C_7\sum_{q=1}^{m}\sum_{l=1}^{2n}\left|\varphi^q_{lk}\right|(1+|\mu_k|)^{4mn^2(m-1)+\theta_l+\eta+r}, r=0,1,\dots,2n. \tag{35}$$

From estimates (31), (33) and (35) follows that

$$\left\|\vec{u};\bar{C}^{2n}([0,T],H^{\alpha}_{M_p})\right\| \leqslant C_8\sum_{l=1}^{2n}\sum_{q=1}^{m}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\left|\varphi^q_{lk}\right|^2(1+|\mu_k|)^{2\xi_l}\right)^{1/2} = C_8\sum_{l=1}^{2n}\left\|\vec{\varphi}_l;\bar{H}^{\xi_l}_{M_p,m}\right\|.$$

where $C_8 = 2nm\max\{C_6, 2nmC_5C_7\}$. From the obtained inequality follows the proof of the theorem. □

Remark 2. *If in Theorem 2 $\alpha > 2n + p/(2\theta_1)$ then, according to (6), such embedding is valid $\bar{C}^{2n}\left([0,T],H^{\alpha}_{M_p}\right) \subset C^{2n}_{M_p,m}(\bar{D}^p)$ and the solution of the problem (1), (2), defined by the formula (22), is a solution in the classical sense.*

4 Estimates of small denominators

Let's find when the inequality (30) holds true. To do this, we show that $\Delta(\mu_k,T)$, as function of variable T, is a quasi-polynomial and apply Theorem 2.1 from [9]. We denote by $\mathcal{J}_z$, $z \in \mathbb{N}$, the set of all vectors of the form $J = (j_1,\dots,j_z)$, $j_l \in \{0,1\}$, $l \in \{1,\dots,z\}$;

$$A = (\underbrace{\alpha_1,\dots,\alpha_1}_{m},\dots,\underbrace{\alpha_{2n},\dots,\alpha_{2n}}_{m}), \quad B = (\underbrace{\beta_1,\dots,\beta_1}_{m},\dots,\underbrace{\beta_{2n},\dots,\beta_{2n}}_{m}),$$

$$R = (\underbrace{r_1,\dots,r_1}_{m},\dots,\underbrace{r_{2n},\dots,r_{2n}}_{m}), \quad \Gamma_k = (\gamma_{1k},\dots,\gamma_{nm,k},-\gamma_{1k},\dots,-\gamma_{nm,k}),$$

by $A_q, B_q, R_q, \Gamma_{qk}$, $q \in \{1,\dots,2nm\}$, we denote coordinates of vectors A, B, R and Γ_k respectively; $\Gamma_{\omega,k} = (\Gamma_{i_1,k},\dots,\Gamma_{i_{2nm},k})$, $\omega = (i_1,\dots,i_{2nm}) \in S_{2nm}$,

$$V_j = (\underbrace{P^1_j,\dots,P^1_j}_{m},\dots,\underbrace{P^{2n}_j,\dots,P^{2n}_j}_{m}), \quad j \in \{1,\dots,2nm\},$$

by H_{sj}, $s,j \in \{1,\dots,2nm\}$, we denote values defined as follows:

$$H_{ml+q,j} = H_{qj} = h^q_{jk}, \quad q \in \{1,\dots,m\}, l \in \{1,\dots,2n-1\}, j \in \{1,\dots,2nm\},$$

where h^q_{jk} are components of vectors (17).

Further, we will need the following proposition which is proved in the paper [7].

Lemma 3. *For arbitrary $x_q, y_q \in \mathbb{C}$, $q \in \{1,\dots,z\}$, following equality holds true*

$$\prod_{q=1}^{z}(x_q+y_q) = \sum_{j_1=0}^{1}\cdots\sum_{j_z=0}^{1}\prod_{q=1}^{z}x_q^{j_q}\prod_{l=1}^{z}y_l^{1-j_l}.$$

For each $\mu_k \in M_p \setminus \{\vec{0}\}$ the determinant $\Delta(\mu_k,T)$ can be expressed by the formula [8]

$$\Delta(\mu_k,T) = \sum_{\omega\in S_{2nm}}(-1)^{\rho_\omega}\prod_{q=1}^{2nm}H_{i_q,q}\left(A_qV_{i_q,q} + B_qI\left(R_q,\Gamma_{i_q,k}\right)\right), \tag{36}$$

where $V_{i_q,q}$ is the element at number q of the vector V_{i_q}, and

$$I(R_q,\Gamma_{i_q,k}) = \int_0^T t^{R_q}\exp\left(\Gamma_{i_q,k}t\right)dt = Q_{R_q}(\Gamma_{i_q,k},T)\exp\left(T\Gamma_{i_q,k}\right) - Q_{R_q}(\Gamma_{i_q,k},0), \tag{37}$$

$$Q_{R_q}(\Gamma_{i_q,k},t) = \sum_{l=1}^{R_q+1}\frac{(-1)^{l+1}R_q!\;t^{R_q-l+1}}{(R_q-l+1)!\,(\Gamma_{i_q,k})^{n}}, \quad q \in \{1,\dots,2nm\}. \tag{38}$$

On basis of formulas (36), (37) we obtain that

$$\Delta(\mu_k, T) = \sum_{\omega\in S_{2nm}} (-1)^{\rho_\omega} \prod_{q=1}^{2nm} H_{i_q,q}\Big([A_q V_{i_q,q} - B_q Q_{R_q}(\Gamma_{i_q,k}, 0)] + B_q Q_{R_q}(\Gamma_{i_q,k}, T)\exp(T\Gamma_{i_q,k})\Big). \tag{39}$$

Formula (39) on basis of Lemma 3 may be expressed in the form

$$\Delta(\mu_k, T) = \sum_{\omega\in S_{2nm}} (-1)^{\rho_\omega} \sum_{J\in\mathcal{J}_{2nm}} \Delta_{1k}(\omega, J, T)\Delta_{2k}(\omega, J, T),$$

where

$$\Delta_{1k}(\omega, J, T) = \prod_{q=1}^{2nm}\Big(B_q Q_{R_q}(\Gamma_{i_q,k}, T)\exp(T\Gamma_{i_q,k})\Big)^{j_q} = B(J)Q_J(\Gamma_{\omega,k}, T)\exp(T(J, \Gamma_{\omega,k})), \tag{40}$$

$$B(J) = \prod_{q=1}^{2nm}(B_q)^{j_q}, \quad Q_J(\Gamma_{\omega,k}, T) = \prod_{q=1}^{2nm}\Big(Q_{R_q}(\Gamma_{i_q,k}, T)\Big)^{j_q}, \tag{41}$$

$$(J, \Gamma_{\omega,k}) = \sum_{q=1}^{2nm} j_q\Gamma_{i_q,k}, \quad J\in\mathcal{J}_{2nm},\ \omega\in S_{2nm}; \tag{42}$$

$$\Delta_{2k}(\omega, J, T) = \prod_{l=1}^{2nm}\left(A_l V_{i_l,l} - B_l Q_{R_l}(\Gamma_{i_l,k}, 0)\right)^{1-j_l}. \tag{43}$$

The formula (43) by opening brackets, in view of (38), can be expressed in the following form

$$\Delta_{2k}(\omega, J, T) = P_{1k}(\omega, J)\exp\left(T\sum_{l=nm+1}^{2nm}(1-j_l)\Gamma_{i_l,k}\right) + P_{2k}(\omega, J), \tag{44}$$

where values $P_{1k}(\omega, J), P_{2k}(\omega, J)$ don't depend on T.

On basis of (39), (40), (44), we obtain the following expression for $\Delta(\mu_k, T)$

$$\Delta(\mu_k, T) = \sum_{\omega\in S_{2nm}} (-1)^{\rho_\omega} \sum_{J\in\mathcal{J}_{2nm}} \bar{Q}_J(\Gamma_{\omega,k}, T)\exp(T(J, \Gamma_{\omega,k})), \tag{45}$$

where $\bar{Q}_J(\Gamma_{\omega,k}, T)$, $\omega\in S_{2nm}$, $J\in\mathcal{J}_{2nm}$, are some polynomials of variable T with complex coefficients, such that

$$\begin{aligned}\deg \bar{Q}_J(\Gamma_{\omega,k}, T) &\leqslant \max_{J\in\mathcal{J}_{2nm}}\{\deg Q_J(\Gamma_{\omega,k}, T)\}\\ &= \sum_{q=1}^{2nm}\deg Q_{R_q}(\Gamma_{i_q,k}, T) = \sum_{q=1}^{2nm} R_q = m(r_1+\cdots+r_{2n}).\end{aligned} \tag{46}$$

Estimates (46) we obtained by using (38) and (41). From (45) follows that $\Delta(\mu_k, T)$ is a quasi-polynomial of variable T.

For each $\mu_k\in M_p\setminus\{\vec{0}\}$ we consider the function $\Delta(\mu_k, \tau)$ defined of interval $(0, \infty)$ by formula (45), where T is replaced by τ. On basis of formula (45) and inequalities (46) $\Delta(\mu_k, \tau)$ can be expressed in the form

$$\Delta(\mu_k, \tau) = \sum_{J\in\mathcal{J}_{2nm}} F_J(\tau)\exp(\tau(J, \Gamma_k)), \tag{47}$$

where $F_J(\tau)$ is the polynomial with constant coefficients of degree N_J, $N_J\leqslant m(r_1+\cdots+r_{2n})$, and the number of terms with different exponents does not exceed $1+2^{nm+1}$. From the formula (47) follows that the function $\Delta(\mu_k, \tau)$ is analytic on interval $(0, \infty)$. We analytically continue it on $\mathbb{R}$ and obtained function we denote by $D := D(\mu_k, \tau)$.

By $E(D, \varepsilon, [0, b])$ we denote a set of $\tau\in[0, b]$, $b\in\mathbb{R}_+$, for which the inequality $|D(\mu_k, \tau)|\leqslant\varepsilon$ holds. On basis of Theorem 2.1 from [9], given that $\mathrm{Re}(J, \Gamma_k) = 0$ (it's follows from (14)), for each $\mu_k\in M_p\setminus\{\vec{0}\}$ following estimate holds

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(D, \varepsilon, [0, b]) \leqslant C_9 B(\mu_k)\left(\frac{4\varepsilon}{G(\mu_k)}\right)^{\frac{1}{N-1}}, \quad C_9 = C_9(N, b), \tag{48}$$

where

$$N := \sum_{J\in\mathcal{J}_{2nm}}(1+N_J) \leqslant \left(1+2^{nm+1}\right)(1+m(r_1+\cdots+r_2)), \tag{49}$$

$$B(\mu_k) := 1 + \max_{J\in\mathcal{J}_{2nm}}|(J, \Gamma_k)|, \quad \mu_k\in M_p\setminus\{\vec{0}\}, \tag{50}$$

$$G(\mu_k) = \max_{1\leqslant j\leqslant N}\left\{|(d/d\tau)^{j-1}D(\mu_k, \tau)|_{\tau=0}(B(\mu_k))^{-j}\right\}, \quad \mu_k\in M_p\setminus\{\vec{0}\}. \tag{51}$$

Taking into account (15), (42) and (50) we obtain

$$B(\mu_k) \leqslant C_{10}(1+|\mu_k|), \quad C_{10} = 2nmC_1.$$

Lemma 4. *There exists a number $\delta(\vec{\alpha}, \vec{\beta})\in\mathbb{N}$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n})$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_{2n})$, such that*

$$\left.\frac{d^q}{d\tau^q}D(\mu_k, \tau)\right|_{\tau=0} = \begin{cases} 0, & q<\delta(\vec{\alpha}, \vec{\beta}),\\ \delta(\vec{\alpha}, \vec{\beta})!\,C_{11}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{r})W(\mu_k), & q=\delta(\vec{\alpha}, \vec{\beta}),\end{cases} \tag{52}$$

where $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_{2n})$ and by $W(\mu_k) = \det\|\bar{h}_{jk}\gamma_{jk}^{l-1}\|_{l=1,\ldots,2n}^{j=1,\ldots,2nm}$ we denote the value of Wronskian of the system of functions (16) at point $t=0$.

Proof. We denote $g_{lj}(\mu_k, \tau) := \alpha_l P_j^l + \beta_l I_l(\gamma_{jk})$, $l, j\in\{1, \ldots, 2n\}$, where P_j^l, $I_l(\gamma_{jk})$ are defined by formulas (19), (20) respectively. We have following extensions:

$$\exp(\gamma_{jk}\tau) = \sum_{q=0}^{2n-1}\frac{\gamma_{jk}^q}{q!}\tau^q + \tau^{2n}v_{jk}(\tau), \quad j\in\{1, \ldots, 2nm\},$$

$$I_l(\gamma_{jk}) = \int_0^\tau t^{r_l}\exp(\gamma_{jk}t)dt = \sum_{q=0}^{2n-1}\frac{\gamma_{jk}^q}{q!(r_l+q+1)}\tau^{r_l+q+1} + \tau^{r_l+2n+1}V_{jlk}(\tau), \tag{53}$$

where $l\in\{1, \ldots, 2n\}, j\in\{1, \ldots, 2nm\}$;

$$P_j^l = \begin{cases}\gamma_{jk}^{2(l-1)}, & 1\leqslant l\leqslant n,\\ \sum_{q=0}^{2n-1}\frac{\gamma_{jk}^{q+2(l-n-1)}}{q!}\tau^q + \tau^{2n}v_{jk}(\tau), & n+1\leqslant l\leqslant 2n,\end{cases} \quad j\in\{1, \ldots, 2nm\}, \tag{54}$$

where $\nu_{jk}(\tau)$, $V_{jlk}(\tau) = (r_l + 2n + 2)^{-1} \int_0^\tau \nu_{jk}(t)dt$ are some analytic in a neighborhood of the point $\tau = 0$ functions. We rewrite the extension (54) in the form

$$P_j^l = \begin{cases} \gamma_{jk}^{2(l-1)}, & 1 \leqslant l \leqslant n, \\ \sum\limits_{q=2(l-n-1)}^{2n-1} \dfrac{\tau^{q-2(l-n-1)}}{(q-2(l-n-1))!}\gamma_{jk}^q + \tau^{4n-2l+2}\bar{\nu}_{jlk}(\tau), & n+1 \leqslant l \leqslant 2n, \end{cases} \tag{55}$$

where

$$\bar{\nu}_{jlk}(\tau) = \begin{cases} \nu_{jk}(\tau), & l = n+1, \\ \sum\limits_{q=2n}^{2l-3} \dfrac{\gamma_{jk}^q \tau^{q-2n}}{(q-2(l-n-1))!} + \tau^{2(l-n-1)}\nu_{jk}(\tau), & n+2 \leqslant l \leqslant 2n, \end{cases} \quad j \in \{1, \ldots, 2nm\}.$$

By substituting extensions (53) and (55) in the expression for $g_{lj}(\mu_k, \tau)$ for each $j \in \{1, \ldots, 2nm\}$ we obtain following extensions:

$$\begin{aligned} g_{lj}(\mu_k, \tau) &= \alpha_l \gamma_{jk}^{2(l-1)} + \beta_l \sum_{q=0}^{2n-1} \frac{\gamma_{jk}^q}{q!(r_l+q+1)}\tau^{r_l+q+1} + \beta_l \tau^{r_l+2n+1} V_{jlk}(\tau), \quad 1 \leqslant l \leqslant n, \\ g_{lj}(\mu_k, \tau) &= \alpha_l \sum_{q=2(l-n-1)}^{2n-1} \frac{\tau^{q-2(l-n-1)}}{(q-2(l-n-1))!}\gamma_{jk}^q + \beta_l \sum_{q=0}^{2n-1} \frac{\gamma_{jk}^q}{q!(r_l+q+1)}\tau^{r_l+q+1} \\ &\quad + \alpha_l \tau^{4n-2l+2}\bar{\nu}_{jk}(\tau) + \beta_l \tau^{r_l+2n+1} V_{jlk}(\tau), \qquad n+1 \leqslant l \leqslant 2n. \end{aligned} \tag{56}$$

In formulas (56) we group terms on degrees of γ_{jk}. We obtain that

$$g_{lj}(\mu_k, \tau) = \sum_{q=0}^{2n-1} \gamma_{jk}^q \tilde{g}_{lq}(\alpha_l, \beta_l, \tau) + \widetilde{V}_{jlk}(\tau),\ l \in \{1, \ldots, 2n\},\ j \in \{1, \ldots, 2nm\}, \tag{57}$$

where

$$\tilde{g}_{lq}(\alpha_l, \beta_l, \tau) = \begin{cases} \beta_l \dfrac{\tau^{r_l+q+1}}{q!(r_l+q+1)}, & q \neq 2(l-1), \\ \alpha_l + \beta_l \dfrac{\tau^{r_l+q+1}}{q!(r_l+q+1)}, & q = 2(l-1), \end{cases} \tag{58}$$

if $l \in \{1, \ldots, n\}$ and

$$\tilde{g}_{lq}(\alpha_l, \beta_l, \tau) = \begin{cases} \beta_l \dfrac{\tau^{r_l+q+1}}{q!(r_l+q+1)}, & q \leqslant 2(l-n)-3, \\ \alpha_l \dfrac{\tau^{q-2(l-n-1)}}{(q-2(l-n-1))!} + \beta_l \dfrac{\tau^{r_l+q+1}}{q!(r_l+q+1)}, & 2(l-n-1) \leqslant q \leqslant 2n, \end{cases} \tag{59}$$

if $l \in \{n+1, \ldots, 2n\}$,

$$\widetilde{V}_{jlk}(\tau) = \begin{cases} \beta_l \tau^{r_l+2n+1} V_{jlk}(\tau), & 1 \leqslant l \leqslant n, \\ \tau^{4n-2l+2}(\alpha_l \bar{\nu}_{jk}(\tau) + \beta_l \tau^{r_l-2n+2l-1} V_{jlk}(\tau)), & n+1 \leqslant l \leqslant 2n. \end{cases} \tag{60}$$

Due to the definition of the function $D(\mu_k, \tau)$ it can be expressed by the formula

$$D(\mu_k, \tau) = \det \|\vec{h}_{jk} g_{lj}(\mu_k, \tau)\|_{l=1,\ldots,2n}^{j=1,\ldots,2nm}. \tag{61}$$

We substitute obtained extensions (57) in the formula (61) and by using elementary properties of determinants receive that

$$\begin{aligned} D(\mu_k, \tau) &= \det \left\| \vec{h}_{jk} \left(\sum_{q=0}^{2n-1} \gamma_{jk}^q \tilde{g}_{lq}(\alpha_l, \beta_l, \tau) + V_{lj}(\alpha_l, \beta_l, \mu_k, \tau) \right) \right\|_{l=1,\ldots,2n}^{j=1,\ldots,2nm} \\ &= \det \left\| \vec{h}_{jk} \sum_{q=0}^{2n-1} \gamma_{jk}^q \tilde{g}_{lq}(\alpha_l, \beta_l, \tau) \right\|_{l=1,\ldots,2n}^{j=1,\ldots,2nm} + \bar{D}_k(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \tau), \end{aligned} \tag{62}$$

where by $\bar{D}_k(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \tau) := \bar{D}(\mu_k, \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \tau)$ we denote some analytic at the point $\tau = 0$ function, which have at this point zero of higher order than

$$\det \left\| \vec{h}_{jk} \sum_{q=0}^{2n-1} \gamma_{jk}^q \tilde{g}_{lq}(\alpha_l, \beta_l, \tau) \right\|_{l=1,\ldots,2n}^{j=1,\ldots,2nm}.$$

It's follows from formulas (58)–(60).

Let us consider the matrix

$$\mathbf{F} = \left\| \vec{h}_{jk} \sum_{q=0}^{2n-1} \gamma_{jk}^q \tilde{g}_{lq}(\alpha_l, \beta_l, \tau) \right\|_{l=1,\ldots,2n}^{j=1,\ldots,2nm}$$

and split it into m blocks, each is of size $2n \times 2nm$

$$\mathbf{F} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_m \end{matrix} \right\|, \qquad \mathbf{F}_s = \left\| h_{jk}^s \sum_{q=0}^{2n-1} \gamma_{jk}^q \tilde{g}_{lq}(\alpha_l, \beta_l, \tau) \right\|_{l=1,\ldots,2n}^{j=1,\ldots,2nm},$$

where h_{jk}^s, $s \in \{1, \ldots, m\}$, are components of vectors (17). It is easy to see that each of the blocks $\mathbf{F}_s$, $s \in \{1, \ldots, m\}$, is a product of two matrices:

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{G} \cdot \mathbf{W}_s, \quad \mathbf{G} = \|\tilde{g}_{l,q-1}(\alpha_l, \beta_l, \tau)\|_{l,q=1}^{2n}, \quad \mathbf{W}_s = \left\| h_{jk}^s \gamma_{jk}^{q-1} \right\|_{j=1,\ldots,2nm}^{q=1,\ldots,2n}.$$

Size of the matrix $\mathbf{G}$ is $2n \times 2n$, and of the matrix $\mathbf{W}_s$ is $2n \times 2nm$. Therefore

$$\mathbf{F} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{G} \cdot \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{G} \cdot \mathbf{W}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{G} \cdot \mathbf{W}_m \end{matrix} \right\|.$$

Note that the determinant of the matrix $\operatorname{col}\|\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \ldots, \mathbf{W}_m\|$ is accurate to a sign equal to $W(\mu_k)$. We assume that $\det \mathbf{G} \neq 0$. Let us consider the block matrix of size $2nm \times 2nm$ of the form

$$\mathbf{G}_m = \left\| \begin{matrix} \mathbf{G}^{-1} & \mathbf{O}_{2n} & \cdots & \mathbf{O}_{2n} \\ \mathbf{O}_{2n} & \mathbf{G}^{-1} & \cdots & \mathbf{O}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O}_{2n} & \mathbf{O}_{2n} & \cdots & \mathbf{G}^{-1} \end{matrix} \right\|,$$

where by $\mathbf{O}_{2n}$ we denote zero matrix of size $2n \times 2n$, and $\mathbf{G}^{-1}$ is an inverse matrix to $\mathbf{G}$. It's obviously that $\det \mathbf{G}_m = (\det \mathbf{G})^{-m}$. Then, according to the rule of multiplication of block matrices, we obtain that

$$\mathbf{G}_m \cdot \mathbf{F} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{G}^{-1} & \mathbf{O}_{2n} & \cdots & \mathbf{O}_{2n} \\ \mathbf{O}_{2n} & \mathbf{G}^{-1} & \cdots & \mathbf{O}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O}_{2n} & \mathbf{O}_{2n} & \cdots & \mathbf{G}^{-1} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \mathbf{G}\cdot\mathbf{W}_1 \\ \mathbf{G}\cdot\mathbf{W}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{G}\cdot\mathbf{W}_m \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{W}_m \end{matrix} \right\|.$$

Wherefrom

$$\det(\mathbf{G}_m \cdot \mathbf{F}) = \det \mathbf{G}_m \cdot \det \mathbf{F} = \det \mathbf{F} (\det \mathbf{G})^{-m} = \pm W(\mu_k). \tag{63}$$

On the basis of the formula (63) we obtain equality

$$\det \mathbf{F} = \pm W(\mu_k)(\det \mathbf{G})^m = \pm W(\mu_k)(\det \|\tilde{g}_{l,q-1}(\alpha_l, \beta_l, \tau)\|_{l,q=1}^{2n})^m. \tag{64}$$

Taking into account the formula (64), the equality (62) can be written as

$$D(\mu_k, \tau) = \pm W(\mu_k)(\det \|\tilde{g}_{l,q-1}(\alpha_l, \beta_l, \tau)\|_{l,q=1}^{2n})^m + \tilde{D}_k(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \tau). \tag{65}$$

From (58), (59) follows, that $\det \|\tilde{g}_{l,q-1}(\alpha_l, \beta_l, \tau)\|_{l,q=1}^{2n}$ is a polynomial with respect to τ (and therefore is different from zero for all except a finite number of points τ) and don't depends on μ_k. From the resulting expansion (65) it follows that the smallest degree of τ, in the polynomial $(\det \|\tilde{g}_{l,q-1}(\alpha_l, \beta_l, \tau)\|_{l,q=1}^{2n})^m$ is equal to the number $\delta(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$, and coefficient beside it is we denote as $C_{11}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{r})$. In other words, equalities (52) hold true. The lemma is proved. □

For some values of parameters $\vec{\alpha}$ i $\vec{\beta}$ values $\delta(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ and $C_{11}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{r})$ can be easily calculated.

Example 1. *Let in the conditions* (2) $\alpha_l = 0$, $l \in \{1, \dots, 2n\}$. *Then from formulas* (58), (59) *we obtain that*

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{l,q-1}(0, \beta_l, \tau) &= \beta_l \frac{\tau^{r_l+q}}{(q-1)!(r_l+q)}, \quad q \in \{1, \dots, 2n\}, \\ \det \|\tilde{g}_{l,q-1}(0, \beta_l, \tau)\|_{l,q=1}^{2n} &= \det \left\| \beta_l \frac{\tau^{r_l+q}}{(q-1)!(r_l+q)} \right\|_{l,q=1}^{2n} \\ &= \prod_{l=1}^{2n} \frac{\beta_l}{(l-1)!} \det \left\| \frac{1}{r_l+q} \right\|_{l,q=1}^{2n} \tau^{r+n(2n+1)}, \end{aligned} \tag{66}$$

where we denote $r = r_1 + \dots + r_{2n}$. *According to [12, p.110] this equality is valid*

$$\det \left\| \frac{1}{r_l+q} \right\|_{l,q=1}^{2n} = \prod_{2n \geqslant j > l \geqslant 1} (r_j - r_l)(j-l) \prod_{j,l=1}^{2n} (r_j + l)^{-1}. \tag{67}$$

On basis of (66), (67) *we obtain that*

$$\begin{aligned} &\delta(\vec{0}, \vec{\beta}) = m(r + n(2n+1)), \\ &C_{11}(\vec{0}, \vec{\beta}, \vec{r}) = \left(\prod_{j=1}^{2n} \frac{\beta_l}{(l-1)!} \prod_{2n \geqslant j > l \geqslant 1} (r_j - r_l)(j-l) \prod_{j,l=1}^{2n} (r_j + l)^{-1} \right)^m. \end{aligned}$$

Now we estimate the below value of $G(\mu_k)$, defined by the formula (51). Taking into account formulas (51)–(52) we obtain that

$$G(\mu_k) = \left| (\partial/\partial\tau)^{\delta(\vec{\alpha},\vec{\beta})} D(\mu_k, \tau) \right|_{\tau=0} (B(\mu_k))^{-\delta(\vec{\alpha},\vec{\beta})-1} \geqslant C_{12} |W(\mu_k)| \, (1 + |\mu_k|)^{-\delta(\vec{\alpha},\vec{\beta})-1}, \tag{68}$$

where $C_{12} = \delta(\vec{\alpha}, \vec{\beta})! \, C_{11}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{r})(C_{10})^{-\delta(\vec{\alpha},\vec{\beta})-1}$.

Theorem 3. *Let there exists a constant* $\eta_0 \geqslant 0$ *such that for all (except for finite number of) vectors* $\mu_k \in M_p$ *the inequality*

$$|W(\mu_k)| > C_{13}(1 + |\mu_k|)^{\eta_0} \tag{69}$$

holds. Then for almost all (with respect to Lebesgue measure on $\mathbb{R}$*) numbers* $T > 0$ *the inequality* (30) *holds true for all (except for finite number of) vectors* $\mu_k \in M_p$, *if*

$$\eta > \delta(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) - \eta_0 + 1 + \left(1 + 2^{nm+1}\right) \left(\frac{p}{\theta_1} + 1\right) (1 + m(r_1 + \dots + r_{2n})).$$

Proof. Let $\varepsilon_k = (1 + |\mu_k|)^{-\eta}$, $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}$. Taking into account (48), (49), (51) and (68) for the measure of those $\tau \in [0, b]$ for which the inequality $|D(\mu_k, \tau)| \leqslant \varepsilon_k$ holds we obtain estimate

$$\begin{aligned} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(D, \varepsilon_k, [0, b]) &\leqslant C_9 C_{10} \, (1 + |\mu_k|) \left(\frac{4 \, (1 + |\mu_k|)^{-\eta}}{C_{12} C_{13} \, (1 + |\mu_k|)^{-\delta(\vec{\alpha},\vec{\beta}) + \eta_0 - 1}} \right)^{1/\chi} \\ &= C_{14} \, (1 + |\mu_k|)^{-\frac{\eta - \delta(\vec{\alpha},\vec{\beta}) + \eta_0 - 1}{\chi} + 1} \leqslant C_{14} d_1 \, |k|^{-\left(\frac{\eta - \delta(\vec{\alpha},\vec{\beta}) + \eta_0 - 1}{\chi} - 1 \right) \theta_1}, \end{aligned} \tag{70}$$

where $\chi = \left(1 + 2^{nm+1}\right) (1 + m(r_1 + \dots + r_2))$. Because of $\left(\frac{\eta - \delta(\vec{\alpha},\vec{\beta}) + \eta_0 - 1}{\chi} - 1 \right) \theta_1 > p$, the series $\sum_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(D, \varepsilon_k, [0, b])$ is convergent. Then by Borel-Kantelli Lemma [14] the measure of those $\tau \in (0, b]$, which belongs to an infinite number of sets $E(D, \varepsilon_k, [0, b])$, is equal to zero. Thus, for almost all (with respect to Lebesgue measure on $\mathbb{R}$) numbers $\tau \in (0, b]$ the inequality $|D(\mu_k, \tau)| \geqslant \varepsilon_k$ holds for all (except a finite number) of vectors $\mu_k \in M_p$. Since from the inequality (70) follows, that the measures of sets $E(D, \varepsilon_k, [0, b])$ don't depend on b (this fact is the consequence of that the system (1) is of hyperbolic type), then, sending b to infinity, we obtain that for almost all (with respect to Lebesgue measure on $\mathbb{R}$) numbers $\tau \in (0, \infty)$ the inequality $|D(\mu_k, \tau)| \geqslant \varepsilon_k$ holds for all (excepting a finite number of) vectors $\mu_k \in M_p$. Since $\Delta(\mu_k, T) \equiv D(\mu_k, T)$ for all $T \in (0, \infty)$, then from the above follows the proof of the theorem. □

Proposition 1. *If in the problem* (1), (2) $p = 1$ *then the inequality* (69) *holds true at* $\eta_0 > 4n^2 m(m-1) + nm(2n-1)$.

Proof. Under the condition of the proposition roots of the equation (13) at $p = 1$ have the form $\gamma_{jk} = \gamma_j \mu_k$, $j \in \{1, \dots, 2nm\}$, where by γ_j we denote roots of the equation

$$\det \left\| \sum_{|\vec{s}|^* = 2n} i^{|s|} \mathbf{A}_{\vec{s}} \gamma^{2s_0} \right\| = 0.$$

Vectors $\vec{h}_{jk}$ at $p = 1$ have the form $\vec{h}_{jk} = \vec{h}_j \mu_k^{2n(m-1)}$, $j \in \{1, \dots, 2nm\}$, respectively, where by $\vec{h}_j$ we denote some nonzero column of the matrix $L^*(\gamma_j^2, i)$, which is adjugate matrix of the matrix $L(\gamma_j^2, i)$, $j \in \{1, \dots, 2nm\}$. Hence

$$\begin{aligned} W(\mu_k) &= \det \|\vec{h}_{jk} \gamma_{jk}^{l-1}\|_{l=1,\dots,2n}^{j=1,\dots,2nm} = \det \|\vec{h}_j \gamma_j^{l-1} \mu_k^{2n(m-1)+l-1}\|_{l=1,\dots,2n}^{j=1,\dots,2nm} \\ &= \mu_k^{4n^2 m(m-1)+nm(2n-1)} \det \|\vec{h}_j \gamma_j^{l-1}\|_{l=1,\dots,2n}^{j=1,\dots,2nm}. \end{aligned}$$

From the above equality follows aforesaid statement. □

Proposition 2. *If $m = 1$, i.e. the system* (1) *consists of a single equation, then the inequality* (69) *holds at $\eta_0 = 0$.*

Proof. Under the condition of the proposition we have that $W(\mu_k) = \prod_{1 \leqslant l < j \leqslant 2n} (\gamma_{jk} - \gamma_{lk})$, where by γ_{jk}, $j \in \{1, \dots, 2n\}$, we denote roots of the equation (13) at $m = 1$. Hence, at $m = 1$ the equation (1) is strictly hyperbolic, then from inequalities 2.21 in [14, p. 100], follows that $|\gamma_{jk} - \gamma_{lk}| \geqslant C_{15} > 0$, where $1 \leqslant l < j \leqslant 2n$. From these inequalities follows that $|W(\mu_k)| \geqslant (C_{15})^{n(2n+1)}$. □

5 COROLLARY

In the present paper we investigated the correctness of the problem with integral conditions with respect to the time for hyperbolic in the narrow sense system of PDE's with constant coefficients in a class of almost periodic by spatial variables functions. We established the criterion of unique solvability of this problem and the sufficient conditions for the existence of its solutions. To solve the problem, small denominators (which are the quasi-polynomials with respect to the upper limit of integration) arising in the construction of solutions of the posed problem, we used the metric approach.

Our results can be extended to the Gårding hyperbolic systems of equations of the form

$$L\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \frac{\partial}{\partial x}\right)[\vec{u}] := \sum_{|\hat{s}|^* \leqslant 2n} \mathbf{A}_{\hat{s}} \frac{\partial^{2n} \vec{u}(t,x)}{\partial t^{2s_0} \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}} = \vec{0}, \qquad (t,x) \in D^p.$$

REFERENCES

[1] Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. *On integral nonlocal boundary value problems for some partial differential equations.* Bull. Georg. Natl. Acad. Sci. 2011, **5** (1), 31–37.

[2] Besicovitch A.S. Almost periodic functions. Dover, Cambridge, 1954.

[3] Dell'acqua G., Santucci P. *Embedding theorems of Sobolev-Besicovitch spaces $W_{ap}^{k,1}(\mathbb{R}^s)$.* Rend. Mat. Appl. 1996, **16** (7), 525–536.

[4] Faddeev D.K., Sominskii I.S. Collection of Problems in Higher Algebra. Vyshcha shkola, Kyiv, 1971. (in Ukrainian)

[5] Fardigola L.V. *Influence of parameters on the properties of solutions of integral boundary value problems in a layer.* Izv. Vuzov. Matematika 1993, **7**, 51–58.(in Russian)

[6] Il'kiv V.S. *A problem with integral conditions for system of partial differential equations with variable coefficients.* Bull. National Univ. "Lviv Polytechnik". Appl. Math. Series 1999, **364**, 318–323. (in Ukrainian)

[7] Kuz' A.M., Ptashnyk B.I. *A problem with integral conditions with respect to time for Gårding hyperbolic equations.* Ukr. Math. J. 2013, **65**(2), 277–293. doi:10.1007/s11253-013-0777-7

[8] Lancaster P. Theory of matrices. Academic Press, New-York, 1969.

[9] Medvid O.M., Symotyuk M.M. *Diophantine approximation of characteristic determinant of an integral problem for linear partial differential equation.* Sci. Bull. Chernivtsi Univ. Ser. Matematika 2004, **228**, 74–85. (in Ukrainian)

[10] Medvid O.M., Symotyuk M.M. *A problem with integral conditions for linear system of partial differential equations.* Math. Methods Phys. Mech. Fields 2007, **50** (1), 32–39. (in Ukrainian)

[11] Medvid O.M., Symotyuk M.M. *A problem with integral conditions for system of partial differential equations with deviating argument.* Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. 2007, **4**, 414–427. (in Ukrainian)

[12] Pólya G., Szegő G. Problems and Theorems in Analysis II. Springer, Berlin, 1998.

[13] Pul'kina L.S. *A Nonlocal Problem with Integral Conditions for a Hyperbolic Equation.* Differ. Equ. 2004, **40** (7), 947–953. doi:10.1023/B:DIEQ.0000047025.64101.16

[14] Ptashnyk B.Yo. Ill-posed Boundary Value Problems for Partial Differential Equations. Naukova dumka, Kyiv, 1984. (in Russian)

[15] Shubin M.A. *Almost periodic functions and partial differential operators.* Russ. Math. Surv. 1978, **33** (2), 1–47. doi:10.1070/RM1978v033n02ABEH002303

[16] Tamarkin J.D. On some general problems in the theory of ordinary linear differential equations and on the expansion in series of arbitrary functions. Petrograd, 1917. (in Russian)

Received 03.07.2014

Кузь А.М., Пташник Б.Й. *Задача з інтегральними умовами за часовою змінною для системи гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами* // Карпатські матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 282–299.

В області, що є декартовим добутком відрізка $[0, T]$ і простору $\mathbb{R}^p$, досліджено задачу з інтегральними умовами за часовою координатою для системи гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами у класі майже періодичних за просторовими змінними функцій. Знайдено критерій єдиності та достатні умови існування розв'язку задачі. Для розв'язання проблеми малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку задачі, використано метричний підхід

Ключові слова і фрази: інтегральні умови, малі знаменники, міра Лебега, майже періодичні функції, гіперболічна система.

Кузь А.М., Пташник Б.И. *Задача с интегральными условиями по времени для системы гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 282–299.

В области, являющейся декартовым произведением отрезка $[0, T]$ и пространства $\mathbb{R}^p$, исследована задача с интегральными условиями по временной координате для системы гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами в классе почти периодических по пространственным переменным функций. Найдены критерий единственности и достаточные условия существования решения задачи. Для решения проблемы малых знаменателей, которые возникли при построении решения задачи, использовано метрический подход.

Ключевые слова и фразы: интегральные условия, малые знаменатели, мера Лебега, почти периодические функции, гиперболическая система.

ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, 6 (2), 300–309
doi:10.15330/cmp.6.2.300-309

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.300–309

Кулявець Л.В.[1], Мулява О.М.[2]

ПРО ЗРОСТАННЯ ОДНОГО КЛАСУ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

У термінах узагальнених порядків досліджено зв'зок між зростанням цілого ряду Діріхле $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ і зростанням цілих рядів Діріхле $F_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} \exp\{s\lambda_n\}$, $1 \leq j \leq 2$, якщо коефіцієнти a_n повязані з коефіцієнтами $a_{n,j}$ певними співвідношеннями.

Ключові слова і фрази: ряд Діріхле, узагальнений порядок.

[1] Ivan Franko National University, 1 Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine
[2] National University of Food Technologies, 68 Volodymyrska str., 01601, Kyiv, Ukraine
E-mail: lubov.kulyavets@gmail.com (Кулявець Л.В.), info@nuft.edu.ua (Мулява О.М.)

Вступ

Для цілої функції $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ нехай $\varrho[f]$ — її порядок, а $\sigma[f]$ — тип. Використовуючи формули Адамара для знаходження цих величин, Е. Келис [1] довів дві такі теореми.

Теорема А. *Нехай функції $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,1} z^n$ і $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,2} z^n$ є скінченного порядку, мають регулярне зростання (в розумінні рівності порядку $\varrho[f]$ та нижнього порядку $\lambda[f]$) і послідовності $(|a_{n,1}/a_{n+1,1}|)$ та $(|a_{n,2}/a_{n+1,2}|)$ є неспадними для $n \geq n_0$. Тоді, якщо $\ln(1/|a_n|) = (1 + o(1))\sqrt{\ln(1/|a_{n,1}|)\ln(1/|a_{n,2}|)}$ при $n \to \infty$, то функція f має регулярне зростання і $\varrho[f] = \sqrt{\varrho[f_1]\varrho[f_2]}$.*

Теорема Б. *Нехай цілі функції f_1 і f_2 з теореми А мають однаковий порядок $\varrho[f_1] = \varrho[f_2] = \varrho \in (0, +\infty)$ і типи $\sigma[f_1] = \sigma_1$, $\sigma[f_2] = \sigma_2$. Припустимо, що $a_{n,1} \neq 0$ і $|a_{n,2}| \geq |a_{n,1}|/l(1/|a_{n,1}|)$ для всіх $n \geq n_0$, де l — повільно змінна функція. Тоді, якщо $|a_n| = (1 + o(1))\sqrt{|a_{n,1}||a_{n,2}|}$ при $n \to \infty$, то функція f має порядок $\varrho[f] = \varrho$ і тип $\sigma[f] \leq \sqrt{\sigma_1\sigma_1}$.*

Зауважимо, що дещо раніше Р. Срівастава [4,5] намагався довести теорему Б без умов $a_{n,1} \neq 0$ і $|a_{n,2}| \geq |a_{n,1}|/l(1/|a_{n,1}|)$ для всіх $n \geq n_0$, а теорему А — без умови неспадання послідовностей $(|a_{n,1}/a_{n+1,1}|)$ та $(|a_{n,2}/a_{n+1,2}|)$. На помилковість таких тверджень було вказано в Math. Rev., 1963, Vol. 25, №2204, №2206.

Метою нашої статті є узагальнення теорем А і Б на випадок цілих рядів Діріхле скінченного узагальненого порядку за М.М. Шереметою, причому замість двох цілих функцій f_1 і f_2 розглядатимемо $n \geq 2$ цілих рядів Діріхле.

УДК 517.537.72
2010 *Mathematics Subject Classification:* 30B50.

Отже, нехай $\Lambda = (\lambda_n)$ — зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, $S(\Lambda)$ — клас цілих рядів Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

із заданою послідовністю показників (λ_n), а $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$.

Через L позначимо клас додатних неперервних на $(-\infty, +\infty)$ функцій α таких, що $\alpha(x) = \alpha(x_0)$ для $-\infty < x \leq x_0$ і $\alpha(x) \uparrow +\infty$ при $x_0 \leq x \to +\infty$. Будемо говорити, що $\alpha \in L^0$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha((1 + o(1))x) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$. Нарешті, $\alpha \in L_{\text{пз}}$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha(cx) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0, +\infty)$, тобто α — повільно зростаюча функція. Зрозуміло, що $L_{\text{пз}} \subset L^0$.

Для $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ узагальненими порядком $\varrho_{\alpha\beta}[F]$ і нижнім порядком $\lambda_{\alpha\beta}[F]$ цілого ряду Діріхле (1) називаються величини

$$\varrho_{\alpha,\beta}[F] = \overline{\lim_{\sigma \to +\infty}} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, F))}{\beta(\sigma)}, \qquad \lambda_{\alpha,\beta}[F] = \underline{\lim_{\sigma \to \infty}} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, F))}{\beta(\sigma)}.$$

Важливим у наших дослідженнях є наступний отриманий в [3] результат.

Лема 1. *Нехай $0 < p < +\infty$, $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ — неперервно диференційовні функції і виконується одна з умов:*

а) $\alpha \in L^0$, $\beta(\ln x) \in L^0$, $\dfrac{\beta^{-1}(c\alpha(x))}{\ln x} \to \dfrac{1}{p}$ $(x \to +\infty)$ *для кожного* $c \in (0, +\infty)$ *і* $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n \to \infty)$;

б) $\alpha \in L_{\text{пз}}$, $\beta \in L^0$, $\varrho_{\alpha,\beta}[F] < +\infty$, $\dfrac{\beta^{-1}(c\alpha(x))}{\ln x} = O(1)$ $(x \to +\infty)$ *і* $\ln n = o(\lambda_n \beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$ $(n \to \infty)$ *для кожного* $c \in (0, +\infty)$.

Тоді

$$\varrho_{\alpha,\beta}[F] = k_{\alpha,\beta}[F] =: \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\alpha(\lambda_n / p)}{\beta\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{\lambda_n} \ln \dfrac{1}{|a_n|}\right)},$$

а якщо крім цього $\alpha(\lambda_{n+1}/p) = (1 + o(1))\alpha(\lambda_n/p)$ *і* $\dfrac{\ln|a_n| - \ln|a_{n+1}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \nearrow +\infty$ *при* $n_0 \leq n \to \infty$, *то*

$$\lambda_{\alpha,\beta}[F] = \varkappa_{\alpha,\beta}[F] =: \underline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\alpha(\lambda_n / p)}{\beta\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{\lambda_n} \ln \dfrac{1}{|a_n|}\right)}.$$

Зауважимо, що для того, щоб $\lambda_{\alpha,\beta}[F] \geq \varkappa_{\alpha,\beta}[F]$ досить, щоб $\alpha(\lambda_{n+1}/p) = (1 + o(1))\alpha(\lambda_n/p)$ при $n \to \infty$.

1 Узагальнення теореми А

Припустимо, що $F_j \in S(\Lambda)$ $(2 \leq j \leq m)$ і

$$F_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} \exp\{s\lambda_n\}. \tag{2}$$

Теорему А узагальнює така теорема.

Теорема 1. *Нехай $\alpha \in L_{П3}$ та $\beta \in L^0$ — неперервно диференційовні функції,*

$$\frac{\beta^{-1}(c\alpha(x))}{\ln x} = O(1)$$

при $x \to +\infty$ і $\ln n = o(\lambda_n \beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$ при $n \to \infty$ для кожного $c \in (0, +\infty)$, а всі функції (2) мають регулярне $\alpha\beta$-зростання (тобто $\lambda_{\alpha,\beta}[F_j] = \varrho_{\alpha,\beta}[F_j] < +\infty$), послідовності

$$\frac{\ln |a_{n,j}| - \ln |a_{n+1,j}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \nearrow +\infty$$

при $n_0 \le n \to \infty$ і $\alpha(\lambda_{n+1}) = (1 + o(1))\alpha(\lambda_n)$ при $n \to \infty$. Тоді, якщо

$$\beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}\right) = (1 + o(1)) \prod_{j=1}^{m} \beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|}\right)^{\omega_j}, \quad n \to \infty, \tag{3}$$

де $\omega_j > 0$ і $\sum\limits_{j=1}^{m} \omega_j = 1$, то функція (1) має регулярне $\alpha\beta$-зростання і

$$\varrho_{\alpha,\beta}[F] = \prod_{j=1}^{m} \varrho_{\alpha,\beta}[F_j]^{\omega_j}.$$

Доведення. Оскільки $\alpha \in L_{П3}$, $\beta \in L^0$ і $\lambda_{\alpha,\beta}[F_j] = \varrho_{\alpha,\beta}[F_j] = \varrho_j < +\infty$, то

$$\alpha(\lambda_{n+1}/p) = (1 + o(1))\alpha(\lambda_n/p),$$

$$\beta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}\right) = (1 + o(1))\beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}\right)$$

при $n \to \infty$ для будь-якого $p \in (0, +\infty)$, і отже, за лемою 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha(\lambda_n)} \beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|}\right) = \frac{1}{\varrho_j}.$$

Тому з (3) отримуємо

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha(\lambda_n)} \beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha(\lambda_n)} \prod_{j=1}^{m} \beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|}\right)^{\omega_j} \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{\alpha(\lambda_n)} \beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|}\right)\right)^{\omega_j} \\
&= \prod_{j=1}^{m} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha(\lambda_n)} \beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|}\right)\right)^{\omega_j} = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{\varrho_j}\right)^{\omega_j},
\end{aligned}$$

тобто

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}\right)} = \prod_{j=1}^{m} \varrho_j^{\omega_j}.$$

Використовуючи лему 1 і зауваження до неї, звідси легко одержуємо, що

$$\prod_{j=1}^{m} \varrho_j^{\omega_j} = \lambda_{\alpha,\beta}[F] \le \varrho_{\alpha,\beta}[F] = \prod_{j=1}^{m} \varrho_j^{\omega_j},$$

тобто функція F має регулярне $\alpha\beta$-зростання і $\varrho_{\alpha,\beta}[F] = \prod\limits_{j=1}^{m} \varrho_{\alpha,\beta}[F_j]^{\omega_j}$. Теорему 1 доведено. □

Якщо виберемо $\alpha(x) = \ln x$ і $\beta(x) = x$ для $x \ge x_0$, то з означення узагальнених порядку та нижнього порядку випливають відповідно означення R-порядку $\varrho_R[F]$ та нижнього R-порядку $\lambda_R[F]$, а з теореми 1 отримуємо наступне твердження.

Наслідок 1. *Нехай $\ln n = o(\lambda_n \ln \lambda_n)$ і $\ln \lambda_{n+1} = (1 + o(1)) \ln \lambda_n$ при $n \to \infty$, всі функції (2) мають регулярне зростання (тобто $\lambda_R[F_j] = \varrho_R[F_j] < +\infty$) і послідовності*

$$\frac{\ln |a_{n,j}| - \ln |a_{n+1,j}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \nearrow +\infty$$

при $n_0 \le n \to \infty$. Тоді, якщо

$$\ln \frac{1}{|a_n|} = (1 + o(1)) \prod_{j=1}^{m} \ln^{\omega_j} \frac{1}{|a_{n,j}|}, \quad n \to \infty, \tag{4}$$

де $\omega_j > 0$ і $\sum\limits_{j=1}^{m} \omega_j = 1$, то функція (1) має регулярне зростання і $\varrho_R[F] = \prod\limits_{j=1}^{m} \varrho_R[F_j]^{\omega_j}$.

Якщо у степеневому розвиненні цілої функції f зробимо заміну $z = e^s$, то отримаємо цілий ряд Діріхле (1). При цьому $\varrho_R[F] = \varrho[f]$, $\lambda_R[F] = \lambda[f]$, а з наслідку 1 випливає наступне твердження.

Наслідок 2. *Нехай $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, а цілі функції $f_j(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{k,j} z^k$ $(2 \le j \le m)$ мають регулярне зростання і послідовності $(|a_{k,j}/a_{k+1,j}|) \nearrow +\infty$ при $k_0 \le k \to \infty$. Тоді за умови (4) функція f має регулярне зростання і $\varrho[f] = \prod\limits_{j=1}^{m} \varrho[f_j]^{\omega_j}$.*

Теорема А випливає з наслідку 2 за умов $m = 2$ і $\omega_j = 1/2$.

2 Узагальнення теореми Б

Припустимо, що, як у теоремі 1, $\alpha \in L_{П3}$ та $\beta \in L^0$ — неперервно диференційовні функції. Для того, щоб отримати узагальнення теореми Б, крім узагальненого порядку $\varrho_{\alpha,\beta}[F] \in (0, +\infty)$ введемо (узагальнений) тип за формулою

$$T_{\alpha,\beta}[F] = \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\ln M(\sigma, F)}{\alpha^{-1}(\varrho_{\alpha,\beta}[F]\beta(\sigma))}.$$

Оскільки $T_{\alpha,\beta}[F] = \varrho_{\alpha_1,\beta_1}[F]$, де $\alpha_1(x) = x$ і $\beta_1(x) = \alpha^{-1}(\varrho_{\alpha,\beta}[F]\alpha(x))$ для $x \ge x_0$, то ми можемо застосувати лему 1. Зауважимо, що $\alpha_1 \in L^0$, а використовуючи теорему Лагранжа, неважко показати, що $\beta_1(\ln x) \in L^0$ за умови $\dfrac{\ln \beta_1(x)}{x} = O(1)$ при $x \to +\infty$, тобто за умови

$$\frac{\ln \alpha^{-1}(\varrho_{\alpha,\beta}[F]\beta(x))}{x} = O(1)$$

при $x \to +\infty$, яка рівносильна умові

$$\frac{\ln \alpha^{-1}(x)}{\beta^{-1}(x/\varrho_{\alpha,\beta}[F])} = O(1), \quad x \to +\infty. \tag{5}$$

З іншого боку, оскільки $\alpha_1(x) = x$, то умова $\dfrac{\beta_1^{-1}(c\alpha_1(x))}{\ln x} \to \dfrac{1}{p}$ $(x \to +\infty)$ для кожного $c \in (0, +\infty)$ рівносильна умові $\dfrac{\beta_1^{-1}(x)}{\ln x} \to \dfrac{1}{p}$ $(x \to +\infty)$, тобто для $p = \varrho_{\alpha,\beta}[F]$ рівносильна умові

$$\frac{\ln \alpha^{-1}(x)}{\beta^{-1}(x/\varrho_{\alpha,\beta}[F])} \to \varrho_{\alpha,\beta}[F], \quad x \to +\infty. \tag{6}$$

Оскільки з (6) випливає (5), то з леми 1 випливає наступна лема.

Лема 2. *Нехай функції $\alpha \in L_{\text{П3}}$ та $\beta \in L^0$ неперервно диференційовні і $\varrho_{\alpha,\beta}[F] \in (0, +\infty)$. Тоді за умов (6) і $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n \to \infty)$ правильна рівність*

$$T_{\alpha,\beta}[F] = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\varrho_{\alpha,\beta}[F]\alpha^{-1}\left(\varrho_{\alpha,\beta}[F]\beta\left(\dfrac{1}{\varrho_{\alpha,\beta}[F]} + \dfrac{1}{\lambda_n}\ln\dfrac{1}{|a_n|}\right)\right)}.$$

Наступна теорема узагальнює теорему Б.

Теорема 2. *Нехай функції $\alpha \in L_{\text{П3}}$, $\beta \in L^0$ неперервно диференційовні, виконується умова (6), $\alpha(x) = (1+o(1))\ln x$ при $x \to +\infty$ і $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n \to \infty)$. Нехай всі ряди Діріхле (2) мають однаковий узагальнений порядок $\varrho_{\alpha,\beta}[F_j] = \varrho \in (0, +\infty)$ і типи $T_{\alpha,\beta}[F_j] \in (0, +\infty)$. Припустимо, що коефіцієнти ряду Діріхле (1) задовольняють умову*

$$\alpha^{-1}\left(\varrho\beta\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right)\right) = (1+o(1))\prod_{j=1}^{m}\alpha^{-1}\left(\varrho\beta\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right)\right)^{\omega_j} \tag{7}$$

при $n \to \infty$, де ω_j — додатні числа і $\sum\limits_{j=1}^{m}\omega_j = 1$. Тоді, якщо $a_{n,1} \neq 0$ для всіх $n \geq n_0$ і

$$\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right) \leq (1+o(1))\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,1}|}\right), \quad n \to \infty, \tag{8}$$

для всіх $2 \leq j \leq m$, то ряд Діріхле (1) має узагальнений порядок $\varrho_{\alpha,\beta}[F] = \varrho$ і тип $T_{\alpha,\beta}[F] \leq \prod\limits_{j=1}^{m} T_{\alpha,\beta}[F_j]^{\omega_j}$.

Доведення. Оскільки $\alpha(x) = (1+o(1))\ln x$ $(x \to +\infty)$, то $\ln \alpha^{-1}(x) = (1+o(1))x$ $(x \to +\infty)$ і з (7) з огляду на умову $\beta \in L^0$ отримуємо

$$\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right) = (1+o(1))\sum_{j=1}^{m}\omega_j\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right), \quad n \to \infty.$$

Тому

$$\frac{1}{\varrho_{\alpha,\beta}[F]} = \varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha(\lambda_n)}\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right) = \varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha(\lambda_n)}\sum_{j=1}^{m}\omega_j\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right)$$
$$\geq \sum_{j=1}^{m}\omega_j\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha(\lambda_n)}\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right) = \sum_{j=1}^{m}\frac{\omega_j}{\varrho} = \frac{1}{\varrho}.$$

З іншого боку, з огляду на умову (8)

$$\frac{1}{\varrho_{\alpha,\beta}[F]} = \varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha(\lambda_n)}\left(\omega_1\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,1}|}\right) + \sum_{j=2}^{m}\omega_j\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right)\right)$$
$$\leq \varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha(\lambda_n)}\left(\omega_1\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,1}|}\right) + (1+o(1)\sum_{j=2}^{m}\lambda_j\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,1}|}\right)\right) = \frac{1}{\varrho}.$$

Нарешті, з огляду на лему 2 і умову (7)

$$\frac{1}{T_{\alpha,\beta}[F]} = \varliminf_{n\to\infty}\frac{\varrho_{\alpha,\beta}[F]}{\lambda_n}\alpha^{-1}\left(\varrho_{\alpha,\beta}[F]\beta\left(\frac{1}{\varrho_{\alpha,\beta}[F]} + \frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right)\right)$$
$$= \varliminf_{n\to\infty}\frac{\varrho_{\alpha,\beta}[F]}{\lambda_n}\prod_{j=1}^{m}\alpha^{-1}\left(\varrho\beta\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right)\right)^{\omega_j}$$
$$\geq \prod_{j=1}^{m}\varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{\varrho_{\alpha,\beta}[F]}{\lambda_n}\alpha^{-1}\left(\varrho\beta\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right)\right)\right)^{\omega_j} = \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{T_{\alpha,\beta}[F_j]}\right)^{\omega_j},$$

тобто $T_{\alpha,\beta}[F] \leq \prod\limits_{j=1}^{m} T_{\alpha,\beta}[F_j]^{\omega_j}$. □

Якщо виберемо $\alpha(x) = \ln x$ і $\beta(x) = x$ для $x \geq x_0$, то з означення $T_{\alpha,\beta}[F]$ випливає означення R-типу $T_R[F]$, а з теореми 2 отримуємо наступне твердження.

Наслідок 3. *Нехай $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n \to \infty)$, а всі ряди Діріхле (2) мають однаковий R-порядок $\varrho_R[F_j] = \varrho \in (0, +\infty)$ і R-типи $T_R[F_j] \in (0, +\infty)$. Припустимо, що коефіцієнти ряду Діріхле (1) задовольняють умову $|a_n| = (1+o(1))\prod\limits_{j=1}^{m}|a_{n,j}|^{\omega_j}$ при $n \to \infty$, де ω_j — додатні числа і $\sum\limits_{j=1}^{m}\omega_j = 1$. Тоді, якщо $a_{n,1} \neq 0$ для всіх $n \geq n_0$ і $\ln\dfrac{1}{|a_{n,j}|} \leq (1+o(1))\ln\dfrac{1}{|a_{n,1}|}$ при $n \to \infty$ для всіх $2 \leq j \leq m$, то ряд Діріхле (1) має R-порядок ϱ і R-тип $T_R[F] \leq \prod\limits_{j=1}^{m} T_R[F_j]^{\omega_j}$.*

З наслідку 3 випливає наступний наслідок.

Наслідок 4. *Нехай $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kz^k$, а цілі функції $f_j(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{k,j}z^k$ $(2 \leq j \leq m)$ мають однаковий порядок $\varrho[f_j] = \varrho \in (0, +\infty)$ і типи $\sigma[f_j] \in (0, +\infty)$. Припустимо, що $|a_n| = (1+o(1))\prod\limits_{j=1}^{m}|a_{n,j}|^{\omega_j}$ при $n \to \infty$, де ω_j — додатні числа і $\sum\limits_{j=1}^{m}\omega_j = 1$. Тоді, якщо $a_{n,1} \neq 0$ для всіх $n \geq n_0$ і $\ln\dfrac{1}{|a_{n,j}|} \leq (1+o(1))\ln\dfrac{1}{|a_{n,1}|}$ при $n \to \infty$ для всіх $2 \leq j \leq m$, то $\varrho[f] = \varrho$ і $\sigma[f] \leq \prod\limits_{j=1}^{m}\sigma[f_j]^{\lambda_j}$.*

Зауважимо, що якщо $|a_{n,j}| \geq |a_{n,1}|/l_j(1/|a_{n,1}|)$, де l_j — повільно змінні функції, то $\ln l_j(x) = o(\ln x)$ при $x \to +\infty$ і, отже, $\ln\dfrac{1}{|a_{n,j}|} \leq (1+o(1))\ln\dfrac{1}{|a_{n,1}|}$ при $n \to \infty$.

Тому за умов $n = 2$ і $\omega_j = 1/2$ з наслідку 4 випливає теорема Б.

3 Цілі ряди Діріхле скінченного модифікованого узагальненого порядку

Неперервної диференційовності функцій α та β і умов на похідну функції $\beta^{-1}(c\alpha(x))$ у доведених вище теоремах можна позбутись, якщо дещо модифікувати узагальнені порядки.

Для $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ модифікованими узагальненими R-порядком $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[F]$ і нижнім R-порядком $\overline{\lambda}_{\alpha\beta}[F]$ цілого ряду Діріхле (1) називаються величини

$$\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F] = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{1}{\beta(\sigma)} \alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{\sigma}\right), \qquad \overline{\lambda}_{\alpha,\beta}[F] = \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{1}{\beta(\sigma)} \alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{\sigma}\right).$$

В [2] отримано наступний результат.

Лема 3. *Нехай або $\alpha \in L_{\text{пз}}$ і $\beta \in L^0$, або $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L_{\text{пз}}$, і для кожного $c \in (0,+\infty)$ виконується $\ln n = o(\lambda_n \beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$ $(n \to \infty)$. Тоді $\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F] = k_{\alpha,\beta}[F]$, а якщо крім цього $\dfrac{\ln |a_n| - \ln |a_{n+1}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \nearrow +\infty$ при $n_0 \le n \to \infty$ і $\dfrac{\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_{n+1}))}{\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n))} \to 1$ при $n \to \infty$, то $\overline{\lambda}_{\alpha,\beta}[F] = k_{\alpha,\beta}[F]$.*

Для модифікованих узагальнених порядків правильна наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай або $\alpha \in L_{\text{пз}}$ і $\beta \in L^0$, або $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L_{\text{пз}}$, а цілі ряди Діріхле (2) мають модифіковані узагальнені порядки $\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F_j] \in (0,+\infty)$ і $\ln n = o(\lambda_n \beta^{-1}(\alpha^c(\lambda_n)))$ $(n \to \infty)$ для кожного $c \in (0,+\infty)$. Припустимо, що коефіцієнти цілого ряду Діріхле (1) задовольняють умову*

$$\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right) = (1+o(1))\prod_{j=1}^{m}\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right)^{\omega_j}, \quad n\to\infty, \tag{9}$$

де ω_j — додатні числа і $\sum\limits_{j=1}^{m}\omega_j = 1$. Тоді:

1) якщо $|a_{n,1}| > 0$ і

$$\ln\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right) \le (1+o(1))\ln\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,1}|}\right), \quad j=2,3,\ldots,m, \tag{10}$$

при $n\to\infty$, то

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{1}{\ln\beta(\sigma)}\ln\alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{\sigma}\right) = 1 \tag{11}$$

і $\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F] \le \prod\limits_{j=1}^{m}\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F_j]^{\omega_j}$;

2) якщо $\dfrac{\ln |a_{n,j}| - \ln |a_{n+1,j}|}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} \nearrow +\infty$ при $n_0 \le n \to \infty$ і $\dfrac{\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_{n+1}))}{\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n))} \to 1$ при $n\to\infty$ для кожних $c \in (0,+\infty)$ та $j = 1,2,\ldots,m$, а функції F_j мають регулярне модифіковане $\alpha\beta$-зростання, тобто $\overline{\lambda}_{\alpha,\beta}[F_j] = \overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F_j]$, то функція F має регулярне модифіковане $\alpha\beta$-зростання і $\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F] = \prod\limits_{j=1}^{m}\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F_j]^{\omega_j}$.

Доведення. Оскільки $\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F_j] \in (0,+\infty)$, то $\varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty}\dfrac{1}{\ln\beta(\sigma)}\ln\alpha\left(\dfrac{\ln M(\sigma,F)}{\sigma}\right)$. Відомо [5], що якщо $h \in L^0$, то h є RO-зростаючою функцією [4, с. 86], тобто для кожного $l \in [1,+\infty)$ і всіх $x \ge x_0$ правильна нерівність $1 \le h(lx)/h(x) \le M(l) < +\infty$, звідки випливає, що $\ln h \in L_{\text{пз}}$. Тому, використовуючи лему 3 з $\ln\alpha$ і $\ln\beta$ замість α і β, за умови $\ln n = o(\lambda_n\beta^{-1}(\alpha^c(\lambda_n)))$ $(n\to\infty)$ для кожного $c \in (0,+\infty)$ отримуємо рівність

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\alpha(n)}\ln\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right) = 1$$

для кожного $j = 1,2,\ldots,m$, а з огляду на (9)

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\alpha(n)}\ln\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right) &= \varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\alpha(n)}\sum_{j=1}^{m}\omega_j\ln\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right)\\ &\ge \sum_{j=1}^{m}\omega_j\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\alpha(n)}\ln\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right) = 1.\end{aligned}$$

З іншого боку, з огляду на (10)

$$\begin{aligned}&\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\alpha(n)}\ln\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right)\\ &\quad= \varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\alpha(n)}\left(\omega_1\ln\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,1}|}\right) + \sum_{j=2}^{m}\omega_j\ln\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right)\right)\\ &\quad\le \varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\alpha(n)}\sum_{j=1}^{m}\omega_j\ln\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,1}|}\right) = 1,\end{aligned}$$

тобто $\varliminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\alpha(n)}{\ln\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right)} = 1$ і за лемою 3 правильна рівність (11).

Далі, оскільки з умови $\ln n = o(\lambda_n\beta^{-1}(\alpha^c(\lambda_n)))$ $(n\to\infty)$ для кожного $c \in (0,+\infty)$ випливає умова $\ln n = o(\lambda_n\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$ $(n\to\infty)$ для кожного $c \in (0,+\infty)$, то за лемою 3 з (9) маємо

$$\begin{aligned}\frac{1}{\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[f]} &= \varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha(n)}\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right) = \varliminf_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{\alpha(n)}\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n^{(j)}|}\right)\right)^{\omega_j}\\ &\ge \prod_{j=1}^{m}\varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha(n)}\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n^{(j)}|}\right)\right)^{\omega_j} = \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F_j]}\right)^{\omega_j},\end{aligned}$$

тобто отримуємо нерівність $\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F] \le \prod\limits_{j=1}^{m}\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F_j]^{\omega_j}$. Твердження 1) доведено.

Оскільки $\overline{\lambda}_{\alpha,\beta}[F_j] = \overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F_j]$, то за лемою 3 маємо $\dfrac{1}{\alpha(n)}\beta\left(\dfrac{1}{\lambda_n}\ln\dfrac{1}{|a_{n,j}|}\right) \to \dfrac{1}{\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F_j]}$ при $n\to\infty$ для кожного $j = 1,2,\ldots,m$. Тому з (9) отримуємо

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha(n)}\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right) &= (1+o(1))\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{\alpha(n)}\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right)\right)^{\omega_j}\\ &= (1+o(1))\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[F_j]}\right)^{\omega_j}, \quad n\to\infty,\end{aligned}$$

звідки за лемою 3 випливає, що функція F має регулярне модифіковане $\alpha\beta$-зростання і правильна рівність $\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F] = \prod_{j=1}^{m} \overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F_j]^{\omega_j}$. Теорему 3 повністю доведено. □

Якщо виберемо $\alpha(x) = \beta(x) = \ln x$, то $\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F] = \varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\ln M(\sigma,F)}{\ln\sigma} - 1 = \varrho_l[F] - 1$, де $\varrho_l[F]$ називається логарифмічним порядком. Зрозуміло, що $\varrho_l[F] \geq 1$, а функції $\alpha(x) = \beta(x) = \ln x$ не задовольняють умови леми 1 і застосувати теорему 1 у цьому випадку неможливо. Проте, застосовуючи теорему 3, прийдемо до наступного наслідку.

Наслідок 5. *Нехай цілі ряди Діріхле* (2) *мають логарифмічні порядки* $\varrho_l[F_j] \in (1, +\infty)$ *і* $\ln n = o(\lambda_n \ln \lambda_n)$ $(n \to \infty)$. *Припустимо, що коефіцієнти цілого ряду Діріхле* (1) *задовольняють умову*

$$\ln\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right) = (1+o(1))\prod_{j=1}^{m}\ln^{\omega_j}\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right), \quad n\to\infty, \tag{12}$$

де ω_j *— додатні числа і* $\sum\limits_{j=1}^{m}\omega_j = 1$. *Тоді:*

1) якщо $|a_{n,1}| > 0$ *і*

$$\ln\ln\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right) \geq (1+o(1))\ln\ln\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,1}|}\right), \quad n\to\infty, \tag{13}$$

для всіх $j = 2,3,\ldots,m$, *то* $\varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln\ln\ln M(\sigma,F)}{\ln\ln\sigma} = 1$ *і* $\varrho_l[F] - 1 \leq \prod\limits_{j=1}^{m}(\varrho_l[F_j]-1)^{\omega_j}$;

2) якщо $\frac{\ln|a_{n,j}| - \ln|a_{n+1,j}|}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} \nearrow +\infty$ *при* $n_0 \leq n \to \infty$ *для всіх* $j = 1,2,\ldots,m$ *і* $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \to 1$ *при* $n\to\infty$ *а функції* F_j *мають регулярне логарифмічне зростання, то функція* F *має регулярне логарифмічне зростання і* $\varrho_l[F] - 1 = \prod\limits_{j=1}^{m}(\varrho_l[F_j]-1)^{\omega_j}$.

Справді, з умови $\ln n = o(\lambda_n \ln\lambda_n)$ $(n\to\infty)$ випливає умова $\ln n = o(\lambda_n \exp\{\ln^c \lambda_n\}$, $(n\to\infty)$, а з умови $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \to 1$ $(n\to\infty)$ — умова

$$\frac{\exp\{c\ln\lambda_{n+1}\}}{\exp\{c\ln\lambda_n\}} \to 1, \quad (n\to\infty),$$

а оскільки $\varrho_l[F] > 1$, то рівності

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln\ln\ln M(\sigma,F)}{\ln\ln\sigma} = 1$$

і

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{1}{\ln\ln\sigma}\ln\ln\frac{\ln M(\sigma,F)}{\sigma} = 1$$

є рівносильними. Тому з теореми 3 легко отримуємо висновки наслідку 5.

Якщо ж виберемо $\alpha(x) = x$ і $\beta(x) = \ln x$, то $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[F] = T[F] =: \varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln M(\sigma,F)}{\sigma\ln\sigma}$ і $\overline{\lambda}_{\alpha\beta}[F] = t[F] =: \varliminf\limits_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln M(\sigma,F)}{\sigma\ln\sigma}$, а з теореми 3 отримуємо наступне твердження.

Наслідок 6. *Нехай для цілих рядів Діріхле* (2) $T[F_j] \in (0, +\infty)$ *і* $\ln n = o(\lambda_n^2)$ $(n\to\infty)$. *Припустимо, що коефіцієнти цілого ряду Діріхле* (1) *задовольняють умову* (12). *Тоді:*

1) якщо $|a_{n,1}| > 0$ *і виконується умова* (13), *то* $\varrho_l[F] = 1$ *і* $T[F] \leq \prod\limits_{j=1}^{m} T[F_j]^{\omega_j}$;

2) якщо $\lambda_{n+1} - \lambda_n \to 0$ *при* $n\to\infty$, $\frac{\ln|a_{n,j}| - \ln|a_{n+1,j}|}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} \nearrow +\infty$ *при* $n_0 \leq n \to \infty$ *і* $t[F_j] = T[F_j]$ *для всіх* $j = 1,2,\ldots,m$, *то* $t[F] = T[F] = \prod\limits_{j=1}^{m} T[F_j]^{\omega_j}$.

REFERENCES

[1] Calys E.G. *A note on the order and type of integral functions*. Riv. Mat. Univ. Parma 1964, **5**, 133–137.

[2] Kulyavetc' L.V., Sheremeta M.M. *On modified generalized order of entire Dirichlet series and characteristic functions of probablity laws*. Bull. Lviv Univ., Series Mech.-Math. 2012, **77**, 124–131. (in Ukrainian)

[3] Sheremeta M.M. Asymptotic property of entire functions, represented by power series and Dirichlet series. Abstract of doct. diss., Kyiv, 1987. (in Russian)

[4] Srivastava R.S.L. *On the order and type of integral functions*. Riv. Mat. Univ. Parma 1959, **10**, 249–255.

[5] Srivastava R.S.L. *On the order and type of integral functions*. Riv. Mat. Univ. Parma 1961, **2**, 265–270.

Надійшло 12.03.2014

Kulyavetc' L.V., Mulyava O.M. *On the growth of a klasss of entire Dirichlet series*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 300–309.

In terms of generalized orders it is investigated a relation between the growth of an entire Dirichlet series $F(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ and the growth of entire Dirichlet series $F_j(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n,j}\exp\{s\lambda_n\}$, $1 \leq j \leq 2$, provided the coefficients a_n are connected with the coefficients $a_{n,j}$ by some correlations.

Key words and phrases: Dirichlet series, generalized order.

Кулявец Л.В., Мулява О.М. *О росте одного класса целых рядов Дирихле* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 300–309.

В терминах обобщенных порядков исследована связь между ростом целого ряда Дирихле $F(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ и ростом целых рядов Дирихле $F_j(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n,j}\exp\{s\lambda_n\}$, $1 \leq j \leq 2$, если коэффициенты a_n связаны с коэффициентами $a_{n,j}$ некоторыми соотношениями.

Ключевые слова и фразы: ряд Дирихле, обобщённый порядок.

ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, 6 (2), 310–316
doi:10.15330/cmp.6.2.310-316

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатськi матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.310–316

KURDACHENKO L.A., PYPKA O.O.

ON SOME GENERALIZATIONS OF BAER'S THEOREM

In this paper we obtained new automorphic analogue of Baer's theorem for the case when an arbitrary subgroup $A \leq Aut(G)$ includes a group of inner automorphisms $Inn(G)$ of a group G and the factor-group $A/Inn(G)$ is co-layer-finite.

Key words and phrases: A-center, A-commutator subgroup, co-layer-finite group, Baer's theorem.

Oles Honchar Dnipropetrovsk National University, 72 Gagarin avenue, 49010, Dnipropetrovsk, Ukraine
E-mail: lkurdachenko@i.ua (Kurdachenko L.A.), Pypka@ua.fm (Pypka O.O.)

INTRODUCTION

Let G be a group and A be a subgroup of $Aut(G)$. The automorphism group A defines some standard subgroups of G. Among these subgroups one of the most well-known are

$$C_G(A) = \{g \in G | \alpha(g) = g, \forall \alpha \in A\},$$
$$[G, A] = \langle g^{-1}\alpha(g) = [g, \alpha] | g \in G, \alpha \in A\rangle.$$

We note that in general $C_G(A)$ is not normal in G, but if $Inn(G) \leq A$, then $C_G(A) \leq C_G(Inn(G)) = \zeta(G)$. In particular, $C_G(A)$ is a normal subgroup of G. Clearly $C_G(A)$ is A-invariant. The subgroup $C_G(A)$ is called the *A-center of G*.

On the other hand, a subgroup $[G, A]$ is normal for every subgroup $A \leq Aut(G)$. In fact, let $g, x \in G$, $\alpha \in A$, and consider $x^{-1}[g, \alpha]x$. We have

$$\begin{aligned} x^{-1}[g,\alpha]x &= x^{-1}g^{-1}\alpha(g)x = (gx)^{-1}\alpha(g)x = (gx)^{-1}\alpha(gxx^{-1})x = (gx)^{-1}\alpha(gx)\alpha(x^{-1})x \\ &= [gx,\alpha](\alpha(x))^{-1}x = [gx,\alpha](x^{-1}\alpha(x))^{-1} = [gx,\alpha][x,\alpha]^{-1} \in [G,A]. \end{aligned}$$

The subgroup $[G, A]$ is called the *A-commutator subgroup of G*.

Denote by ι_x the inner automorphism, defined by element x, that is $\iota_x(g) = x^{-1}gx$ for each $g \in G$. If $A = Inn(G)$, then A-center of G coincides with usual center of G and A-commutator subgroup coincides with the derived subgroup of G.

I. Schur was the first to study the relationships between the derived subgroup and the central factor-group in finite groups [7]. In his paper I. Schur investigated the so-called *Schur multiplicator* (all definitions see, for example, in the book [4, p. 14]). The following result was proved: *if G is a finite group then $[G, G] \cap \zeta(G)$ is isomorphic to a subgroup of $M(G/\zeta(G))$.* Here $M(H)$ denotes the Schur multiplicator of a group H. Later the construction of Schur multiplicator has been extended for arbitrary groups.

УДК 512.544
2010 *Mathematics Subject Classification:* 20F14, 20F19, 20F28.

R. Baer studied the case of infinite groups [1]. He proved that if $G/\zeta(G)$ is finite, then $[G, G]$ is also finite. But many mathematicians refer to this theorem as *Schur's theorem*. In connection with this result, the following question arises: *is there a function f such that $|[G, G]| \leq f(t)$ where $t = |G/\zeta(G)|$?* J. Wiegold has obtained here the best result. He proved that if $t = |G/\zeta(G)|$, then $|[G, G]| \leq w(t) = t^m$ where $m = \frac{1}{2}(log_p t - 1)$ and p is the smallest prime divisor of t [8, p. 347]. In the same paper J. Wiegold proved that this bound is attained if and only if $t = p^n$ where p is a prime [8, p. 347]. When t has more than one prime divisor the picture is less clear.

There are some distinct approaches for obtaining generalizations of the above theorem. One possibility is to use the automorphism groups. P. Hegarty in his paper [3, p. 929] proved that if $A = Aut(G)$ and $G/C_G(A)$ is finite, then $[G, A]$ is also finite. The condition $A = Aut(G)$ is very strong. The finiteness of $G/C_G(Aut(G))$ in this case implies that $Aut(G)$ is finite. In [2] a more general situation was considered: $Inn(G) \leq A$ and $A/Inn(G)$ is finite.

In the following we will show that it is not possible to extend the main results from [2, 3] on arbitrary automorphism group A. The following simple example shows this.

Let p be a prime, $G = \langle a\rangle \times K$, $|a| = p$ and $K = Dr_{n\in\mathbb{N}}\langle b_n\rangle$ be an elementary abelian p-subgroup. Then G has an automorphism α_j such that $\alpha_j(a) = ab_j$, $\alpha_j(x) = x$ for each $x \in K$. It is easily seen that every automorphism α_j has order p and a subgroup A of $Aut(G)$ generated by $\{\alpha_j | j \in \mathbb{N}\}$ is an elementary abelian p-group. Furthermore, $C_G(A) = K = [G, A]$ so that the factor-group $G/C_G(A)$ is finite, but the subgroup $[G, A]$ is infinite.

In this example an automorphism group A is bounded and infinite. Therefore it is natural to consider here the automorphism groups, which have unbounded and infinite factor-groups. One of such types of groups is following.

A group G is said to be *co-layer-finite* if the factor-group G/G^n is finite for all positive integers n. These groups were introduced in the paper [6, p. 500].

For such automorphism groups we obtained the following generalizations of the main results from [2,3].

Theorem A. *Let G be a group and A be a subgroup of $Aut(G)$ such that $Inn(G) \leq A$. Suppose that $G/C_G(A)$ has finite order t. If $A/Inn(G)$ is co-layer-finite, then $[G, A]$ is a finite subgroup.*

The inclusion $Inn(G) \leq A$ implies that $C_G(A) \leq \zeta(G)$, and hence $Inn(G) \cong G/\zeta(G)$ is finite. Therefore the fact that the factor-group $A/Inn(G)$ is co-layer-finite implies that A is co-layer-finite.

R. Baer [1] obtained the following generalization of Schur's theorem.

Suppose that the term $\zeta_k(G)$ having a finite number k of the upper central series of a group G has finite index. Then the term $\gamma_{k+1}(G)$ of the lower central series of G is finite.

Starting from the A-center and A-commutator subgroups, we can define *the upper and the lower A-central series* of G. Suppose that $Inn(G) \leq A$. Put $\zeta_1(G, A) = C_G(A)$. If for ordinal ν we define $\zeta_\nu(G, A)$, then put $\zeta_{\nu+1}(G, A)/\zeta_\nu(G, A) = \zeta_1(G/\zeta_\nu(G, A), A/C_A(\zeta_\nu(G, A)))$. Shorter last group we will write as $\zeta_1(G/\zeta_\nu(G, A), A)$. As usual, if ν is a limit ordinal, then $\zeta_\nu(G, A) = \bigcup_{\mu<\nu} \zeta_\mu(G, A)$. The last term $\zeta_\gamma(G, A) = \zeta_\infty(G, A)$ of this series is called the *upper A-hypercenter of G*. The ordinal γ is called the *A-upper central length* of a group G, which we denote by $zl(G, A)$.

The lower A-central series of a group G is the series

$$G = \gamma_1(G, A) \geq \gamma_2(G, A) \geq \ldots \gamma_\nu(G, A) \geq \gamma_{\nu+1}(G, A) \geq \ldots \gamma_\delta(G, A)$$

defined by the rule $\gamma_2(G,A) = [G,A]$ and recursively $\gamma_{\nu+1}(G,A) = [\gamma_\nu(G,A),A]$ for all ordinals ν and $\gamma_\lambda(G,A) = \bigcap_{\mu<\lambda}\gamma_\mu(G,A)$ for the limit ordinals λ. The last term $\gamma_\delta(G,A) = \gamma_\infty(G,A)$ of this series is called the *lower A-hypocenter of G*.

An automorphic variant of the above Baer's theorem for the case when $A/Inn(G)$ is finite was obtained in [2]. The second main theorem of this paper gives a very wide generalization of this result.

Theorem B. *Let G be a group, A be a subgroup of $Aut(G)$ and Z be the upper A-hypercenter of G. Suppose that $Inn(G) \leq A$, $zl(G,A) = m$ is finite and G/Z is finite. If $A/Inn(G)$ is co-layer-finite, then $\gamma_{m+1}(G,A)$ is a finite subgroup.*

1 Preliminaries and lemmas

Let G be an abelian group, A be a subgroup of $Aut(G)$ and $\alpha \in A$. We define a mapping $d(\alpha): G \to G$ by the rule $d(\alpha)(u) = u^{-1}\alpha(u) = [u,\alpha]$, $u \in G$. We have

$$d(\alpha)(uv) = (uv)^{-1}\alpha(uv) = v^{-1}u^{-1}\alpha(u)\alpha(v) = u^{-1}\alpha(u)v^{-1}\alpha(v) = d(\alpha)(u)d(\alpha)(v),$$

and then $d(\alpha)$ is an endomorphism of G. Furthermore, $Im(d(\alpha)) = [G,\alpha]$, $Ker(d(\alpha)) = C_G(\alpha)$. Thus we have $[G,\alpha] = Im(d(\alpha)) \cong G/Ker(d(\alpha)) = G/C_G(\alpha)$.

Let G be a finite group and suppose that $|G| = p_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{k_n}$ where $p_1 < \ldots < p_n$ are primes. Being nilpotent, the Sylow p_j-subgroup P_j of G has finite subnormal series whose factors are of prime order. It follows that for each $1 \leq j \leq m$ the Sylow p_j-subgroup P_j has at most k_j generators. It is not hard to see that $G = \langle P_1,\ldots,P_n\rangle$, so that G has at most

$$\begin{aligned} k_1+\ldots+k_n &= log_{p_1}|P_1| + \ldots + log_{p_n}|P_n| \leq log_{p_1}|P_1| + \ldots + log_{p_1}|P_n| \\ &= log_{p_1}(|P_1|\cdot\ldots\cdot|P_n|) = log_{p_1}|G| \leq log_2|G| \end{aligned}$$

generators.

Lemma 1. *Let G be an abelian group and A be a finite subgroup of $Aut(G)$. If $G/C_G(A)$ is a finite group, then $[G,A]$ is also finite and there exists a function δ such that $|[G,A]| \leq \delta(|G/C_G(A)|,|A|)$.*

Proof. Put $|G/C_G(A)| = t$, $|A| = k$ and $Z = C_G(A)$. As we have seen above $[G,\alpha] \cong G/C_G(\alpha)$ for every automorphism $\alpha \in A$. Since $Z \leq C_G(\alpha)$, $[G,\alpha]$ is a finite subgroup and $|[G,\alpha]| \leq t$.

Let $M = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_d\}$ be a set of generators of A. As we have seen above, $d \leq log_2(|A|) = log_2(k)$. Since $|[G,\alpha_j]| \leq t$ for every $1 \leq j \leq d$ and $[G,A] = [G,\alpha_1]\cdot\ldots\cdot[G,\alpha_d]$ (see, for example, [5, Lemma 1.1]), $[G,A]$ is a finite and $|[G,A]| \leq td \leq tlog_2(k) = \delta(t,k)$. □

Let G be an abelian group, Z be a subgroup of G and C be a subgroup of $Aut(G)$ such that $C_C(Z) = C = C_C(G/Z)$. For arbitrary element g of G we defined the mapping $\eta_g : C \to Z$ by the rule $\eta_g(\alpha) = [g,\alpha]$, $\alpha \in C$. Since $\alpha \in C$, $\alpha(g) = gz$ for some element $z \in Z$, that is $z = g^{-1}\alpha(g) = \eta_g(\alpha)$. If β is another element of C, then

$$(\alpha\circ\beta)(g) = \alpha(\beta(g)) = \alpha(g\eta_g(\beta)) = \alpha(g)\alpha(\eta_g(\beta)) = g\eta_g(\alpha)\eta_g(\beta),$$

and so

$$\eta_g(\alpha\circ\beta) = g^{-1}(\alpha\circ\beta)(g) = g^{-1}g\eta_g(\alpha)\eta_g(\beta) = \eta_g(\alpha)\eta_g(\beta).$$

Therefore η_g is a homomorphism. We have $Ker(\eta_g) = C_C(g)$. Furthermore,

$$[g^2,\alpha] = g^{-2}\alpha(g^2) = g^{-2}\alpha(g)\alpha(g) = g^{-2}g\eta_g(\alpha)g\eta_g(\alpha) = (\eta_g(\alpha))^2.$$

Applying induction, we obtain that $[g^n,\alpha] = (\eta_g(\alpha))^n$. In particular, if the element gZ has finite order, that is there is a positive integer k such that $g^k \in Z$, then

$$(\eta_g(\alpha))^k = [g^k,\alpha] = g^{-k}\alpha(g^k) = g^{-k}g^k = 1.$$

In other words, $Im(\eta_g)$ is a subgroup of Z, having finite exponent $|g|$.

Suppose that the factor-group G/Z is periodic, then $\Pi(Im(\eta_g)) \subseteq \Pi(G/Z)$. We note that if $g \in Z$, then $\eta_g(\alpha) = 1$ for each $\alpha \in C$. The equation $\bigcap_{g\in G} C_C(g) = C_C(G) = \langle 1\rangle$ together with Remak's theorem yields the embedding

$$C \hookrightarrow Cr_{g\in G}C/C_C(g) \cong Cr_{g\in G}Im(\eta_g).$$

The above inclusion $\Pi(Im(\eta_g)) \subseteq \Pi(G/Z)$ for each $g \in G$ shows that C is an abelian group such that $\Pi(C) \subseteq \Pi(G/Z)$.

Let G be a group and $A \leq Aut(G)$. Suppose that K is an A-invariant normal subgroup of G. For each automorphism $\alpha \in A$ we define the mapping $\alpha_K : G/K \to G/K$ by the rule $\alpha_K(xK) = \alpha(x)K$ for every $x \in G$. Clearly α_K is an endomorphism of G/K. Let $x \in G$ and $\alpha_K(xK) = K$, that is $K = \alpha(x)K$ and $\alpha(x) \in K$. Since K is A-invariant subgroup of G, $x \in K$ and $xK = K$. Therefore α_K is an automorphism of G/K. Furthermore, if $\alpha,\beta \in A$, then

$$(\alpha\circ\beta)_K(xK) = (\alpha\circ\beta)(x)K = \alpha(\beta(x))K = \alpha_K(\beta(x)K) = \alpha_K(\beta_K(xK)) = (\alpha_K\circ\beta_K)(xK).$$

Hence the mapping $\Phi : A \to Aut(G/K)$ given by $\Phi(\alpha) = \alpha_K$, $\alpha \in A$, is a homomorphism.

Lemma 2. *Let G be an abelian group and A be a subgroup of $Aut(G)$. Suppose that $G/C_G(A)$ is a finite group of order t. If A is co-layer-finite, then $[G,A]$ is a finite subgroup.*

Proof. Put $Z = C_G(A)$ and $C = C_A(G/Z)$. Clearly C is a normal subgroup of A. Since G/Z is finite, from above remarked we obtain that C is an abelian group of finite exponent. Since G/Z is finite, factor-group A/C is finite. Then Lemma 5 of the paper [6] implies that a subgroup C is co-layer-finite. Being abelian group of finite exponent, C must be finite. Hence $C = \{\gamma_1,\ldots,\gamma_s\}$ where $s = |C|$. As we saw above, for every automorphism $\alpha \in A$ we have an isomorphism $[G,\alpha] \cong G/C_G(\alpha)$. Since $Z \leq C_G(\alpha)$, $[G,\alpha]$ is a finite subgroup and $|[G,\alpha]| \leq t$. Since $[G,C] = [G,\gamma_1]\cdot\ldots\cdot[G,\gamma_s]$ (see, for example, [5, Lemma 1.1]), $[G,C]$ is a finite subgroup and $|[G,C]| \leq ts$.

Put $V = G/[G,C]$. We note that a subgroup $[G,C]$ is A-invariant. In fact, let g be an arbitrary element of G, $\alpha \in A$, $\gamma \in C$. Since C is a normal subgroup of A, $\alpha\circ\gamma = \gamma_1\circ\alpha$ for some $\gamma_1 \in C$. Then

$$\begin{aligned} \alpha([g,\gamma]) &= \alpha(g^{-1}\gamma(g)) = \alpha(g^{-1})\alpha(\gamma(g)) = \alpha(g^{-1})(\alpha\circ\gamma)(g) = \alpha(g^{-1})(\gamma_1\circ\alpha)(g) \\ &= \alpha(g^{-1})\gamma_1(\alpha(g)) = (\alpha(g))^{-1}\gamma_1(\alpha(g)) = [\alpha(g),\gamma_1] \in [G,C]. \end{aligned}$$

Therefore $[G,C]$ is an A-invariant subgroup.

For each $\alpha \in A$ we define the mapping $\alpha_V : V \to V$ by the rule $\alpha_V(x[G,C]) = \alpha(x)[G,C]$ for every $x \in G$. Since $[G,C]$ is an A-invariant subgroup of G, by above remarked $\alpha_V \in Aut(V)$

and then there exists a homomorphism $\Phi : A \to Aut(V)$ given by $\Phi(\alpha) = \alpha_V$. Put $A_V = \Phi(A)$. If $\gamma \in C$, then $\gamma(g) = gg^{-1}\gamma(g) = g[g,\gamma]$, and hence

$$\gamma_V(g[G,C]) = \gamma(g)[G,C] = g[g,\gamma][G,C] = g[G,C]$$

for every $g \in G$. It follows that $C \leq Ker(\Phi)$. On the other hand, A/C is isomorphic to some subgroup of $Aut(G/Z)$. Since G/Z is finite of order t, A/C has finite order at most $t!$. Hence A_V is finite and $|A_V| \leq t!$. If $g \in Z$, then $\alpha_V(g[G,C]) = \alpha(g)[G,C] = g[G,C]$ for every $\alpha_V \in A_V$. It follows that $Z[G,C]/[G,C] \leq C_V(A_V)$. Thus $V/C_V(A_V)$ is a finite group and $|V/C_V(A_V)| \leq t$. For this case we can apply Lemma 1. By this Lemma $[V, A_V]$ is a finite subgroup, having order at most $\delta(t,t!)$. We have

$$[V, A_V] = [G/[G,C], A_V] = [G,A][G,C]/[G,C] = [G,A]/[G,C].$$

Therefore $[G,A]$ is a finite subgroup. □

2 Proof of Theorem A

Proof. Put $|G/C_G(A)| = t$. Since $Inn(G) \leq A$, $C_G(A) \leq C_G(Inn(G)) = \zeta(G)$. It follows that $G/\zeta(G)$ is finite and $|G/\zeta(G)| \leq t$. Then $K = [G,G]$ is finite and $|[G,G]| \leq w(t) = t^m$ where $m = \frac{1}{2}(log_p t - 1)$ and p is the smallest prime divisor of t [8, p. 347].

Put $G_{ab} = G/K$. For each $\alpha \in A$ we define the mapping $\alpha_{ab} : G_{ab} \to G_{ab}$ by the rule $\alpha_{ab}(xK) = \alpha(x)K$ for every $x \in G$. Being characteristic subgroup of G, K is normal and A-invariant. As above $\alpha_{ab} \in Aut(G/K)$ and then there exists a homomorphism $\Phi : A \to Aut(G/K)$ given by $\Phi(\alpha) = \alpha_{ab}$. Put $A_{ab} = \Phi(A)$. Since G/K is abelian,

$$(\iota_g)_{ab}(x[G,G]) = \iota_g(x)[G,G] = g^{-1}xg[G,G] = x[x,g][G,G] = x[G,G]$$

for each $x \in G$. It follows that $Inn(G) \leq Ker(\Phi)$. In particular, A_{ab} is an epimorphic image of $A/Inn(G)$. If $x \in C_G(A)$, then $\alpha_{ab}(xK) = \alpha(x)K = xK$ for each $\alpha \in A$, which implies the inclusion $C_G(A)K/K \leq C_{G/K}(A_{ab})$. Hence $(G/K)/C_{G/K}(A_{ab})$ is a finite group and $|(G/K)/C_{G/K}(A_{ab})|$ is a divisor of $|G/C_G(A)|$. Applying Lemma 3 of the paper [6] the factor-group $A/Inn(G)$ is co-layer-finite. Then by the same Lemma 3 of the paper [6] its epimorphic image A_{ab} also is co-layer-finite. An application of Lemma 2 shows that $[G_{ab}, A_{ab}]$ has finite order. Furthermore,

$$[G_{ab}, A_{ab}] = [G/[G,G], A_{ab}] = [G,A][G,G]/[G,G].$$

If $g, x \in G$, then

$$[g,x] = g^{-1}x^{-1}gx = g^{-1}\iota_x(g) = [g,\iota_x].$$

It follows that $[G,G] \leq [G,A]$, because we have $Inn(G) \leq A$. Hence

$$[G_{ab}, A_{ab}] = [G,A]/[G,G].$$

And therefore $[G,A]$ is a finite subgroup. □

Let G be a group and H be a subgroup of G. Put $Inn_G(H) = \{\iota_x | x \in H\}$. Clearly $Inn_G(H)$ is a subgroup of $Inn(G)$.

3 Proof of Theorem B

Proof. Let

$$\langle 1 \rangle = Z_0 \leq Z_1 \leq \ldots \leq Z_{m-1} \leq Z_m = Z$$

be the upper A-central series of G. Put $|G/Z| = t$. We proceed by induction on m. If $m = 1$, then $Z_1 = C_G(A)$ has index at most t in G. Application of Theorem A shows that $[G,A] = \gamma_2(G,A)$ is finite.

Suppose inductively that the result is true for some integer $m > 1$ and let G be a group satisfying the hypotheses of the theorem with $zl(G,A) = m$. Consider the factor-group $L = G/Z_1$. Then

$$\langle 1 \rangle = Z_1/Z_1 \leq \ldots \leq Z_{m-1}/Z_1 \leq Z_m/Z_1$$

is the upper A-central series of G/Z_1. For each $\alpha \in A$ we define the mapping $\alpha_L : L \to L$ by the rule $\alpha_L(xZ_1) = \alpha(x)Z_1$ for every $x \in G$. Since Z_1 is A-invariant, by above noted α_L is an automorphism of L and then there exists a homomorphism $\Phi : A \to Aut(L)$ given by $\Phi(\alpha) = \alpha_L$. Put $A_L = \Phi(A)$. It is not hard to prove that $Z/Z_1 \leq \zeta_{m-1}(G/Z_1, A_L)$. Hence $(G/Z_1)/\zeta_{m-1}(G/Z_1, A_L)$ is a finite group and its order is a divisor of $|G/Z|$. Clearly $\Phi(A) = A_L$ is an epimorphic image of A. Furthermore, $Inn(G/Z_1) = \Phi(Inn(G))$, so that $A_L/Inn(L)$ is an epimorphic image of $A/Inn(G)$. Since the factor-group $A/Inn(G)$ is co-layer-finite, by Lemma 3 of the paper [6] its epimorphic image $A_L/Inn(L)$ also is co-layer-finite.

Since $zl(G/Z_1, A_L) = m - 1$, by induction hypothesis $K/Z_1 = \gamma_m(G/Z_1, A_L)$ is finite. Clearly $D = \gamma_m(G,A) \leq K$. At once we note, that D is A-invariant. For every $\alpha \in A$ its restriction $\alpha|_D$ is an automorphism of D and the mapping $\Xi : A \to Aut(D)$ defined by the rule $\Xi(\alpha) = \alpha|_D$ is a homomorphism of A in $Aut(D)$. Moreover, $Ker(\Xi) = C_A(D)$. By Lemma 2 of the paper [2] $[Z,D] = \langle 1 \rangle$, so that $Inn_G(Z) \leq Ker(\Xi)$. It follows that $\Xi(Inn(G))$ is an epimorphic image of G/Z, therefore $\Xi(Inn(G))$ is finite and has order at most t. The factor-group $\Xi(A)/\Xi(Inn(G))$ is an epimorphic image of $A/Inn(G)$, so that by Lemma 3 of the paper [6] $\Xi(A)/\Xi(Inn(G))$ is co-layer-finite. Since $|\Xi(Inn(G))| \leq t$, Lemma 4 of the paper [6] shows that $\Xi(A)$ is co-layer-finite. Clearly

$$Inn(D) = \Xi(Inn_G(D)) \leq \Xi(Inn(G)) \leq \Xi(A).$$

The inclusion $Z_1 \cap D \leq C_D(\Xi(A))$ shows that $D/C_D(\Xi(A))$ is a finite group and its order is at most $|K/Z_1|$. Hence we can apply Theorem A. The application of Theorem A shows that

$$[D, \Xi(A)] = [D,A] = [\gamma_m(G,A), A] = \gamma_{m+1}(G,A)$$

is finite. □

References

[1] Baer R. *Endlichkeitskriterien für Kommutatorgruppen*. Math. Ann. 1952, **124** (1), 161–177. doi:10.1007/BF01343558

[2] Dixon M.R., Kurdachenko L.A., Pypka A.A. *On Some Variants of Theorems of Schur and Baer*. Milan J. Math. 2014, **82** (2), 233–241. doi:10.1007/s00032-014-0215-9

[3] Hegarty P. *The absolute centre of a group*. J. Algebra 1994, **169** (3), 929–935. doi:10.1006/jabr.1994.1318

[4] Karpilovsky G. The Schur multiplier. Clarendon Press, Oxford, 1987.

[5] Kurdachenko L.A., Otal J. *The rank of the factor-group modulo the hypercenter and the rank of the some hypocenter of a group.* Cent. Eur. J. Math. 2013, **11** (10), 1732–1741. doi:10.2478/s11533-013-0284-y

[6] Kurdachenko L.A. *Some conditions for embeddability of an FC-group in a direct product of finite groups and a torsion-free abelian group.* Mathematics of the USSR-Sbornik 1982, **42** (4), 499–514. doi:10.1070/SM1982v042n04ABEH002388

[7] Schur I. *Über die Darstellungen der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare substitutionen.* J. Reine Angew. Math. 1904, **127** (1), 20–50. doi:10.1515/crll.1904.127.20

[8] Wiegold J. *Multiplicators and groups with finite central factor-groups.* Math. Z. 1965, **89** (4), 345–347. doi:10.1007/BF01112166

Received 25.04.2014

Курдаченко Л.А., Пипка О.О. *Про деякі узагальнення теореми Бера* // Карпатські матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 310–316.

В цій статті ми отримали новий автоморфний аналог теореми Бера у випадку, коли довільна підгрупа $A \leq Aut(G)$ містить групу внутрішніх автоморфізмів $Inn(G)$, а фактор-група $A/Inn(G)$ ко-шарово-скінченна.

Ключові слова і фрази: A-центр, A-комутаторна підгрупа, ко-шарово-скінченна група, теорема Бера.

Курдаченко Л.А., Пыпка А.А. *О некоторых обобщениях теоремы Бэра* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 310–316.

В этой статье нами был получен новый автоморфный аналог теоремы Бэра в случае, когда произвольная подгруппа $A \leq Aut(G)$ содержит группу внутренних автоморфизмов $Inn(G)$ группы G, а фактор-группа $A/Inn(G)$ ко-слойно-конечна.

Ключевые слова и фразы: A-центр, A-коммутаторная подгруппа, ко-слойно-конечная группа, теорема Бэра.

ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, 6 (2), 317–319
doi:10.15330/cmp.6.2.317-319

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.317–319

LIVINSKY I.V.[1], ZHUKOVSKA T.G.[2]

ON ORDERS OF TWO TRANSFORMATION SEMIGROUPS OF THE BOOLEAN

We consider the semigroup $\mathcal{O}(\mathcal{B}_n)$ of all order-preserving transformations $\varphi : \mathcal{B}_n \to \mathcal{B}_n$ of ordered by inclusion boolean $\mathcal{B}_n$ of n-element set (i.e. such transformations that $A \subseteq B$ implies $\varphi(A) \subseteq \varphi(B)$) and its subsemigroup $\mathcal{C}(\mathcal{B}_n)$ of those transformations for which $\varphi(A) \subseteq A$ for all $A \in \mathcal{B}_n$. Orders of these semigroups are calculated.

Key words and phrases: semigroup, order-preserving transformation, order-decreasing transformation, monotone boolean functions.

[1] Taras Shevchenko National University, 64/13 Volodymyrska str., 01601, Kyiv, Ukraine
[2] Lesya Ukrainka East European National University, 13 Voli avenue, 43025, Lutsk, Ukraine
E-mail: braexus@online.ua (Livinsky I.V.), t.zhukovska@ukr.net (Zhukovska T.G.)

INTRODUCTION

For every partial order $\leq$ on a set M, two types of transformations of this set arise in a natural way. A transformation $\varphi : M \to M$ is called *order–preserving*, if for every $a, b \in M$, $a \leq b$ implies $\varphi(a) \leq \varphi(b)$, and *order–decreasing*, if for arbitrary $a \in M$ the inequality $\varphi(a) \leq a$ holds. Both order–preserving and order–decreasing transformations form a semigroup with respect to the composition of transformations. These semigroups are denoted by $\mathcal{O}(M, \leq)$ and $\mathcal{F}(M, \leq)$ correspondingly (or just $\mathcal{O}(M)$ and $\mathcal{F}(M)$, if it is clear what the partial order is).

It is clear that studying of semigroups $\mathcal{O}(M)$ and $\mathcal{F}(M)$ began from the simplest case, when M is a finite chain. The semigroup $\mathcal{O}_n$ of order–preserving transformations of n-element chain appeared first in paper [1] and corresponding semigroup $\mathcal{F}_n$ in the book [2].

Studying of these semigroups have been done intensively during last twenty years (see last chapter of [3] and references). For other partial orders such semigroups have been studied relatively small (see [4]).

We consider the boolean $\mathcal{B}_n$ — the set of all subsets of a n-element set $N = \{1, 2, \dots, n\}$ naturally ordered by inclusion. In [5] it is proved that order of a semigroup $\mathcal{F}(\mathcal{B}_n)$ is equal to $2^{n \cdot 2^{n-1}}$. We calculate orders of semigroups $\mathcal{O}(\mathcal{B}_n)$ and $\mathcal{C}(\mathcal{B}_n) = \mathcal{O}(\mathcal{B}_n) \cap \mathcal{F}(\mathcal{B}_n)$.

ORDERS OF SEMIGROUPS $\mathcal{O}(\mathcal{B}_n)$ AND $\mathcal{C}(\mathcal{B}_n)$

For every subset $A \subseteq N$ we can build a vector

$$x_A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n, \qquad \text{where} \qquad \alpha_k = 1 \Leftrightarrow k \in A,$$

such that inclusion relation $\subseteq$ on $\mathcal{B}_n$ induces partial order $\preceq$ on the set $B_n = \{0,1\}^n$ of boolean vectors of length n. Recall that boolean function $f : B_n \to \{0,1\}$ is called *monotone*, if for every $x, y \in B_n$, $x \preceq y$ implies $f(x) \preceq f(y)$. Denote by M_n the set of all monotone boolean functions $f : B_n \to \{0,1\}$.

УДК 512.534
2010 *Mathematics Subject Classification:* Primary 20M20, 06F05; Secondary 06E30.

Theorem 1. $|\mathcal{O}(\mathcal{B}_n)| = |M_n|^n$.

Proof. Let $\varphi \in \mathcal{O}(\mathcal{B}_n)$. For every k, $1 \le k \le n$, consider a boolean function $\varphi_k : B_n \to \{0,1\}$ defined by the rule

$$\varphi_k(x_A) = 1 \quad \text{if and only if} \quad k \in \varphi(A).$$

It is clear that for every k function φ_k is monotone.

Consider the map

$$\mathcal{O}(\mathcal{B}_n) \longrightarrow M_n \times M_n \times \cdots \times M_n, \qquad \varphi \longmapsto (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n).$$

It is obvious that this map is injective. It suffices to show that it is surjective, i.e. every collection $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ of monotone boolean functions corresponds to some transformation φ in $\mathcal{O}(\mathcal{B}_n)$. It is not hard to build such transformation φ. Really, for every subset $A \subseteq N$ define

$$\varphi(A) = \{k \mid \psi_k(x_A) = 1\},$$

then, the transformation $\varphi : \mathcal{B}_n \to \mathcal{B}_n$ will be order–preserving and for every k we will have $\varphi_k = \psi_k$. □

Theorem 2. $|\mathcal{C}(\mathcal{B}_n)| = |M_{n-1}|^n$.

Proof. Since $\mathcal{C}(\mathcal{B}_n) \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{B}_n)$, similarly, as in the proof of previous theorem, for every transformation $\varphi \in \mathcal{C}(\mathcal{B}_n)$ we can construct a collection $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ of monotone boolean functions. Note that for order–decreasing transformation φ, from $k \notin A$ it follows that $k \notin \varphi(A)$. Thus, if $k \notin A$, then $\varphi_k(x_A) = 0$.

For a fixed k the set $\{A \in \mathcal{B}_n \mid k \in A\}$ is naturally identified with the boolean $\mathcal{B}(N \setminus \{k\})$ (which is isomorphic to the boolean $\mathcal{B}_{n-1}$) as a poset. After that, restriction $\widetilde{\varphi}_k$ of the function φ_k to the set of boolean vectors $\{x_A \mid k \in A\}$ we can consider as a boolean function of $n-1$ arguments

$$\widetilde{\varphi}_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = \varphi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, 1, \alpha_k, \ldots, \alpha_{n-1}). \tag{1}$$

Since for $k \notin A$ we have $\varphi_k(x_A) = 0$, then the function $\widetilde{\varphi}_k$ is still monotone, i.e. $\widetilde{\varphi}_k \in M_{n-1}$. This gives us the map

$$\mathcal{C}(\mathcal{B}_n) \longrightarrow M_{n-1} \times M_{n-1} \times \cdots \times M_{n-1}, \qquad \varphi \longmapsto (\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2, \ldots, \widetilde{\varphi}_n), \tag{2}$$

which, obviously, will be injective.

Show that this map is surjective, i.e. every collection $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ of monotone functions from M_{n-1} corresponds to some transformation φ in $\mathcal{C}(\mathcal{B}_n)$. For arbitrary k, $1 \le k \le n$, and a boolean vector $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ denote $x^{(k)} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$. For every subset $A \subseteq N$ define

$$\varphi(A) = \{k \in A \mid \psi_k(x_A^{(k)}) = 1\}. \tag{3}$$

The fact that the transformation $\varphi : \mathcal{B}_n \to \mathcal{B}_n$ is order-decreasing follows from (3). Now, let $A \supset B$. If $k \in \varphi(B)$, then $\psi_k(x_B^{(k)}) = 1$. However, $x_A \succeq x_B$, and since ψ_k is monotone, it follows that $\psi_k(x_A^{(k)}) = 1$. Hence, $k \in \varphi(A)$ and $\varphi(A) \supset \varphi(B)$. Therefore, transformation φ is order–preserving too and $\varphi \in \mathcal{C}(\mathcal{B}_n)$. Finally, from equalities (3) and (1) it follows that for every boolean vector $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$

$$\widetilde{\varphi}_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) = 1 \iff \psi_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) = 1,$$

that is, $\widetilde{\varphi}_k = \psi_k$ for all k. Thus, a transformation φ is a pre-image of a collection $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ with respect to a map (2).

Therefore, the map (2) is a bijection and $|\mathcal{C}(\mathcal{B}_n)| = |M_{n-1}|^n$. □

From theorems 1 and 2 the next corollary follows.

Corollary. $|\mathcal{O}(\mathcal{B}_n)|^{n+1} = |\mathcal{C}(\mathcal{B}_{n+1})|^n$.

Note that the numbers $|M_n|$ are called *Dedekind numbers*. They arise in many problems of algebra and combinatorics. In particular, the number $|M_n|$ is equal to the order of the free distributive lattice of rank n completed with zero and unit. The problem of the computation of these numbers is very difficult. For the moment there are neither known formulas nor even algorithms, that are more effective than exhaustive search of monotone functions. One can find estimates of different kinds (lower, upper, asymptotic) for these numbers in a serious survey [6].

REFERENCES

[1] Aizenshtat A.J. *The defining relations of the endomorphism semigroup of a finite linered ordered set.* Sib. Math. J. 1962, **3** (2), 161–169.

[2] Pin J.E. Varieties of formal languages. Masson, Paris, 1984.

[3] Ganyushkin O., Mazorchuk V. Classical Finite Transformation semigroups. An Introduction. In: Algebra and Applications, 9, XII. Springer–Verlag, London, 2009.

[4] Stronska A. *Nilpotent subsemigroups of a semigroup of order-decreasing transformations of a rooted tree.* Algebra Discrete Math. 2006, (4), 126–140.

[5] Stronska A.O. *Semigroup of order–decreasing transformations of the boolean of a finite set.* Bull. Kyiv Univ.: Series Phys.-Math. Sci. 2006, **2**, 57–62.

[6] Korshunov A.D. *Monotone Boolean functions.* Russian Math. Surveys 2003, **58** (5), 929. doi: 10.1070/RM2003v058n05ABEH000667 (translation of Uspekhi mat. nauk 2003, **58** (5), 89–162. doi: 10.4213/rm667 (in Russian))

Received 21.10.2014

Лівінський І.В., Жуковська Т.Г. *Про порядки двох напівгруп перетворень булеану* // Карпатські матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — C. 317–319.

Розглядаються напівгрупа $\mathcal{O}(\mathcal{B}_n)$ всіх монотонних перетворень $\varphi : \mathcal{B}_n \to \mathcal{B}_n$ впорядкованого за включенням булеану $\mathcal{B}_n$ n-елементної множини (тобто тих перетворень, для яких із $A \subseteq B$ виплаває $\varphi(A) \subseteq \varphi(B)$) та її піднапівгрупа $\mathcal{C}(\mathcal{B}_n)$ тих перетворень, для яких $\varphi(A) \subseteq A$ для всіх $A \in \mathcal{B}_n$. Підраховано порядки цих напівгруп.

Ключові слова і фрази: напівгрупа, монотонне перетворення, стискуюче перетворення, монотонні булеві функції.

Ливинский И.В., Жуковская Т.Г. *О порядках двух полугрупп преобразований булеана* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — C. 317–319.

Рассматриваются полугруппа $\mathcal{O}(\mathcal{B}_n)$ всех изотонных преобразований $\varphi : \mathcal{B}_n \to \mathcal{B}_n$ упорядоченного отношением включения булеана $\mathcal{B}_n$ n-элементного множества (то есть тех преобразований, для которых из $A \subseteq B$ следует $\varphi(A) \subseteq \varphi(B)$) и ее подполугруппа $\mathcal{C}(\mathcal{B}_n)$ тех преобразований, для которых $\varphi(A) \subseteq A$ для всех $A \in \mathcal{B}_n$. Подсчитаны порядки этих полугрупп.

Ключевые слова и фразы: полугруппа, изотонное преобразование, преобразование с убывающим порядком, монотонные булевы функции.

ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 320–328
doi:10.15330/cmp.6.2.320-328

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.320–328

MALYTSKA H.P., BURTNYAK I.V.

THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF CAUCHY PROBLEM FOR A SINGLE EQUATION OF THE DIFFUSION EQUATION WITH INERTIA

In the paper it is found the explicit form of the fundamental solution of Cauchy problem for the equation of Kolmogorov type that has a finite number groups of spatial variables on which there is degeneration of parabolicity.

Key words and phrases: Kolmogorov equations, the fundamental solution, degenerate parabolic equations.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, 57 Shevchenka str., 76018, Ivano-Frankivsk, Ukraine
E-mail: bvanya@meta.ua (Burtnyak I.V.)

INTRODUCTION

In this article we explore the fundamental solution of Cauchy problem (FSCP) or the diffusion equation with inertia, which depends on the inertia of many groups of spatial variables.

In 1934 based on a particular tangent process, Kolmogorov A.N. derived the diffusion equation with inertia [1]. Using the Fourier transform, Hormander L. found the fundamental solution of the equation [2].

To construction of fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic equations where involved many authors, among them Weber M. [3], Il'in, A.M. [4], Oleinik O.A. [5], Eidelman S.D. [6], Ivasyshen S.D. [7] and their students. There were considered equations with one, two spatial groups of variables on which there is degeneration of parabolicity as well as equations having features on the time variable. Detailed analysis of the theory of degenerate parabolic equations in the appropriate time period is done in the works [8,9]. We consider the equations which have the degeneration of parabolicity for arbitrary finite number of groups of spatial variables. This research is a continuation of works [10,11].

1 NOTATIONS AND PROBLEM STATEMENT

Let $x := (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}; x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}; \dots; x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn_k}; \dots; x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pn_p}; x_{q1}, \dots, x_{m1})$, $q = p+1$, $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_p > 1$, $n_k \in \mathbb{N}$, $k = \overline{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, $m \geq p$, $\sum\limits_{k=1}^{p} n_k + m - p = n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Consider the Cauchy problem

$$\partial_t u(t,x) - \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_k} x_{kj} \partial_{x_{kj+1}} u(t,x) = \sum_{v=1}^{m} \partial^2_{x^2_{k1}} u(t,x), \tag{1}$$

УДК 517.956.4
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K70.

$$u(t,x)|_{t=\tau} = u_0(x), \quad 0 \leq \tau < t \leq T < +\infty, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

where $u_0(x)$ — sufficiently smooth finite function. Let us find fundamental solution of Cauchy problem (1), (2).

2 CONSTRUCTION OF THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF CAUCHY PROBLEM (1), (2).

The solution of the problem (1), (2) we will seek in the form of inverse Fourier transform of unknown function $v(t,\xi)$, so

$$u(t,x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x,\xi)\} v(t,\xi)\, d\xi. \tag{3}$$

Since $\partial_t u(t,x) = F(\partial_t v(t,\xi))$, and

$$x_{kj}\partial_{x_{kj+1}} u(t,x) = F\left(-\xi_{kj+1}\partial_{\xi_{kj}} v(t,\xi)\right), \qquad \partial^2_{x^2_{k1}} u(t,x) = F\left(-\xi^2_{k1} v(t,\xi)\right),$$

the problem (1), (2) is reduced to the problem

$$\partial_t v(t,\xi) - \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_k} \xi_{kj+1}\partial_{\xi_{kj}} v(t,\xi) = \sum_{k=1}^{m} \xi^2_{k1} v(t,\xi), \tag{4}$$

$$v(t,\xi)|_{t=\tau} = v_0(\xi), \quad 0 \leq \tau < t \leq T < +\infty, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

The following system corresponds to equation (4)

$$\begin{aligned} dt = \frac{d\xi_{11}}{\xi_{12}} = \frac{d\xi_{12}}{\xi_{13}} = \dots = \frac{d\xi_{1n_1-1}}{\xi_{1n_1}} = \frac{d\xi_{21}}{\xi_{22}} = \dots = \frac{d\xi_{2n_2-1}}{\xi_{2n_2}} = \dots = \frac{d\xi_{k1}}{\xi_{k2}} = \dots \\ = \frac{d\xi_{kn_k-1}}{\xi_{kn_k}} = \frac{d\xi_{p1}}{\xi_{p2}} = \dots = \frac{d\xi_{pn_p-1}}{\xi_{pn_p}} = \frac{dv}{-\sum\limits_{k=1}^{m} \xi^2_{k1} v}. \end{aligned} \tag{6}$$

Let us find $\sum\limits_{k=1}^{m} n_k + 1 - p$ independent integrals of the system (6). From $dt = \frac{d\xi_{kn_k-1}}{\xi_{kn_k}}$, $k = \overline{1,p}$, we obtain

$$\xi_{kn_k-1} = t\xi_{kn_k} + c_{kn_k-1}, \tag{7}$$

and from $dt = \frac{d\xi_{kn_k-2}}{\xi_{kn_k-1}}$, $k = \overline{1,p}$, using (7), we obtain

$$\xi_{kn_k-2} = \frac{t^2}{2!}\xi_{kn_k} + t c_{kn_k-1} + c_{kn_k-2}, \tag{8}$$

and so on. From $dt = \frac{d\xi_{kn_k-j}}{\xi_{kn_k-j+1}}$, we obtain

$$\xi_{kn_k-j} = \frac{t^j}{j!}\xi_{kn_k} + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} c_{kn_k-1} + \dots + c_{kn_k-2}. \tag{9}$$

Analogically, from $dt = \frac{d\xi_k}{\xi_{k2}}$, using $\xi_{k2} = \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!}\xi_{kn_k} + \frac{t^{n_k-3}}{(n_k-3)!} c_{kn_{k1}} + \dots + c_{k2}$, we obtain

$$\xi_{k1} = \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!}\xi_{kn_k} + \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!} c_{1n_k-1} + \dots + c_{k2} + c_{k1}. \tag{10}$$

Let us consider $dt = \frac{dv}{-\left[\sum\limits_{k=1}^{p}\left(\frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!}\xi_{kn_k}+\frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!}c_{1n_k-1}+\dots+c_{k,1}\right)^2+\sum\limits_{k=p+1}^{m}\xi_{k1}^2\right]v}$, and find the integral

$$v = c\exp\left\{-\int\limits_{\tau}^{t}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\beta^{n_k-1}}{(n_k-1)!}\xi_{kn_k}+\frac{\beta^{n_k-2}}{(n_k-2)!}c_{1n_k-1}+\dots+c_{k1}\right)^2 d\beta-\sum_{k=p+1}^{m}\xi_{k1}^2(t-\tau)\right\}, \tag{11}$$

with $t > \tau$. The initial condition implies

$$v_0\Big(\tfrac{\tau^{n_1-1}}{(n_1-1)!}\xi_{1\,n_1}+\tfrac{\tau^{n_1-2}}{(n_1-2)!}c_{1\,n_1-1}+\dots+\tau c_{12}+c_{1\,1};\dots;\tau\xi_{1\,n_1}+c_{1\,n_1-1},\xi_{1\,n_1};$$
$$\tfrac{\tau^{n_2-1}}{(n_2-1)!}\xi_{2\,n_2}+\tfrac{\tau^{n_2-2}}{(n_2-2)!}c_{2\,n_2-1}+\dots+\tau c_{22}+c_{21};\dots;\tau\xi_{2\,n_2}+c_{2\,n_2},\dots\xi_{2\,n_2};\dots;\tfrac{\tau^{n_p-1}}{(n_p-1)!}\xi_{p\,n_p}$$
$$+\tfrac{\tau^{n_p-2}}{(n_p-2)!}c_{p\,n_p-1}+\dots+\tau c_{p2}+c_{p\,1};\xi_{p+1\,1};\xi_{p+2\,1},\dots,\xi_{m\,1}\Big)=c, \tag{12}$$

therefore

$$v=\exp\Big\{-\sum_{k=1}^{m}\xi_{k1}^2(t-\tau)-\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{\tau}^{t}(\beta^{n_k-1}\xi_{kn_k}^2((n_k-1)!)^{-1}+\beta^{n_k-2}c_{kn_k-1}((n_k-2)!)^{-1}$$
$$+\dots+\beta c_{k2}+c_{k1})^2d\beta\Big\}v_0\Big(\xi_{1\,n_1}\tau^{n_1-1}\left((n_1-1)!\right)^{-1}+\sum_{l=1}^{n_1-1}\left((n_1-1-l)!\right)^{-1}c_{1\,n_1-l}$$
$$\tau^{n_1-1-l},\dots,\tau\xi_{1\,n_1}+c_{1\,n_1-1};\xi_{1\,n_1};\dots;\xi_{p\,n_p}\tau^{n_p-1}\left((n_p-1)!\right)^{-1}+\sum_{l=1}^{n_p-1}\left((n_p-1-l)!\right)^{-1}$$
$$c_{pn_p-l}\tau^{n_p-1-l},\dots,\tau\xi_{p\,n_p}+c_{p\,n_p-1};\xi_{p\,n_p};\xi_{p+11},\dots,\xi_{m1}\Big) \tag{13}$$

Replace $c_{1n_1-1},\dots,c_{1\,1};c_{2n_2-1},\dots,c_{2\,1};\dots;c_{pn_p-1},\dots,c_{p\,1}$ with their values that are found from the system of first integrals, $k=\overline{1,p}$;

$$\begin{cases}\xi_{k\,n_k-1}=t\xi_{k\,n_k}+c_{k\,n_k-1},\\ \xi_{k\,n_k-2}=\frac{t^2}{2!}\xi_{k\,n_k}+tc_{k\,n_k-1}+c_{k\,n_k-2},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \xi_{k\,n_k-j}=\frac{t^j}{j!}\xi_{k\,n_k}+\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}c_{k\,n_k-1}+\dots+tc_{k\,n_k-j+1}+c_{k\,n_k-j},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \xi_{k1}=\frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!}\xi_{k\,n_k}+\frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!}c_{k\,n_k-1}+\dots+tc_{k2}+c_{k1}.\end{cases}$$

Therefore $c_{k\,n_k-1}=\xi_{k\,n_k-1}-t\xi_{k\,n_k}$, $c_{k\,n_k-2}=\xi_{k\,n_k-2}-t\xi_{k\,n_k-1}+\frac{t^2}{2!}\xi_{k\,n_k},\dots$ Let

$$c_{k\,n_k-j}=\xi_{k\,n_k-j}-t\xi_{k\,n_k-j+1}+\dots+\frac{(-t)^j}{j!}\xi_{k\,n_k}. \tag{14}$$

Let us show that

$$c_{k\,n_k-(j+1)}=\xi_{k\,n_k-(j+1)}-t\xi_{k\,n_k-j}+\dots+\frac{(-t)^{j+1}}{(j+1)!}\xi_{k\,n_k}. \tag{15}$$

Indeed, since $c_{k\,n_k-(j+1)}=\xi_{k\,n_k-(j+1)}-\frac{t^{j+1}}{(j+1)!}\xi_{k\,n_k}-\frac{t^j}{j!}c_{k\,n_k-1}-\dots-\frac{t^{j-l+1}}{(j-l+1)!}c_{k\,n_k-l}-tc_{k\,n_k-j}$, using (14), we have

$$c_{k\,n_k-(j+1)}=\xi_{k\,n_k-(j+1)}-\tfrac{t^{j+1}}{(j+1)!}\xi_{k\,n_k}-\tfrac{t^j}{j!}\left(\xi_{k\,n_k-1}-t\xi_{k\,n_k}\right)-\tfrac{t^{j-l+1}}{(j-l+1)!}\Big(\xi_{k\,n_k-l}-t\xi_{k\,n_k-l+1}$$
$$+\tfrac{t^2}{2!}\xi_{k\,n_k-l+2}+\tfrac{(-t)^\mu}{\mu!}\xi_{k\,n_k-l+\mu}+\dots+\tfrac{(-t)^l}{l!}\xi_{k\,n_k}\Big)-\dots-t\Big(\xi_{k\,n_k-j}-t\xi_{k\,n_k-j+1}+\tfrac{t^2}{2!}$$

$$\xi_{k\,n_k-j+2}+\dots+\tfrac{(-t)^j}{j!}\xi_{k\,n_k}\Big)=\xi_{k\,n_k-(j+1)}-t\,\xi_{k\,n_k-j}+\tfrac{t^2}{2!}\xi_{k\,n_k-l+2}+\dots+\tfrac{(-t)^{j-l+1}}{(j-l+1)!}\xi_{k\,n_k-l}$$
$$\left[(-1)(-1)^{j-l+1}-C^1_{j-l+1}(-1)^{j-l}-C^2_{j-l+1}(-1)^{j-l-1}-\dots-C^{j-l}_{j-l+1}(-1)\right]+\xi_{k\,n_k-1}\tfrac{t^j}{j!}$$
$$\left[-(-1+1)^j+1\right]+\xi_{k\,n_k}\tfrac{(-t)^{j+1}}{(j+1)!}\left[-(-1+1)^j+1\right]\text{, where } C^l_j=\tfrac{j!}{(j-l)!l!},\ j\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

We have established (15), hence (14) is correct. Using (14), the formula (13) is reduced to the form

$$v(t,\xi)=\exp\Big\{-\sum_{k=1}^{m}\xi_{k1}^2(t-\tau)-\int\limits_{\tau}^{t}\sum_{k=1}^{p}\Big(\xi_{k1}+(\beta-t)\xi_{k2}+\dots+(\beta-t)^{n_k-1}$$
$$\left((n_k-1)!\right)^{-1}\xi_{kn_k}\Big)^2d\beta\Big\}v_0\big(\xi_{11}+(\tau-t)\xi_{12}+\dots+\tfrac{(\tau-t)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}\xi_{1\,n_1},\xi_{12}+(\tau-t)$$
$$\xi_{13}+\dots+\tfrac{(\tau-t)^{n_1-2}}{(n_1-2)!}\xi_{1\,n_1},\dots,\xi_{1\,n_1-1}+(\tau-t)\xi_{1\,n_1},\xi_{1\,n_1};\xi_{21}+(\tau-t)\xi_{22}+\dots$$
$$+\tfrac{(\tau-t)^{n_2-1}}{(n_2-1)!}\xi_{2\,n_2},\dots,\xi_{2\,n_2-1}+(\tau-t)\xi_{2\,n_2},(\tau-t),\dots,\xi_{p\,1}+(\tau-t)\xi_{p2}+\dots$$
$$+\tfrac{(\tau-t)^{n_p-1}}{(n_p-1)!}\xi_{p\,n_p},\dots,\xi_{p\,n_p-1}+(\tau-t)\xi_{p\,n_p},\xi_{p\,n_p};\xi_{p+1\,1},\dots,\xi_{m\,1}\Big). \tag{16}$$

From (16) we find

$$u(t,x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\Big\{i(x,\xi)-\sum_{k=1}^{m}\xi_{k1}^2(t-\tau)-\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{\tau}^{t}\Big((\beta-t)^{n_k-1}\left((n_k-1)!\right)^{-1}$$
$$\xi_{kn_k}+(\beta-t)^{n_k-2}\xi_{kn_k-1}\left((n_k-2)!\right)^{-1}+\dots+(\beta-t)\xi_{k\,2k}+\xi_{k\,1}\Big)^2d\beta\Big\}v_0\big(\xi_{11}$$
$$+(\tau-t)\xi_{12}+\dots+\xi_{1\,n_1}(\tau-t)^{n_1-1}\left((n_1-1)!\right)^{-1},\dots\xi_{1\,n_1-1}+(\tau-t)\xi_{1\,n_1},\xi_{1\,n_1},\dots,$$
$$\xi_{p\,1}+(\tau-t)\xi_{p2}+\dots+(\tau-t)^{n_p-1}\left((n_p-1)!\right)^{-1},\dots,\xi_{pn_p-1}+(\tau-t)\xi_{pn_p},\xi_{pn_p},$$
$$\xi_{p+1\,1},\dots,\xi_{m\,1}\big)\,d\xi \tag{17}$$

Let us make the change of variables in the integral (17)

$$\begin{cases}\xi_{k1}+(\tau-t)\xi_{k2}+\dots+(\tau-t)^{n_k-1}\xi_{kn_k}\left((n_k-1)!\right)^{-1}=\alpha_{k1},\\ \dots\dots\dots\dots\\ \xi_{kj}+(\tau-t)\xi_{kj+1}+\dots+(\tau-t)^{n_k-j}\xi_{kn_k}\left((n_k-1)!\right)^{-1}=\alpha_{kj},\\ \dots\dots\dots\dots\\ \xi_{k\,n_k-1}+(\tau-t)\xi_{kn_k}=\alpha_{k\,n_k-1},\\ \xi_{k\,n_k}=\alpha_{k\,n_k},\\ \xi_{p+1\,1}=\alpha_{p+1\,1},\\ \dots\dots\dots\dots\\ \xi_{m1}=\alpha_{m1},\qquad k=\overline{1,p}.\end{cases} \tag{18}$$

From (18) we have

$$\begin{cases}\xi_{k\,n_k-1}=\alpha_{k\,n_k-1}-(\tau-t)\alpha_{k\,n_k},\\ \xi_{k\,n_k-2}=\alpha_{k\,n_k-2}-(\tau-t)\alpha_{k\,n_k-1}+\frac{(t-\tau)^2}{2!}\alpha_{k\,n_k},\\ \dots\dots\dots\dots\\ \xi_{k\,n_k-j}=\alpha_{k\,n_k-j}-(t-\tau)\alpha_{k\,n_k-j+1}+\dots+\frac{(t-\tau)^j}{j!}\alpha_{k\,n_k},\\ \dots\dots\dots\dots\\ \xi_{k1}=\alpha_{k1}-(t-\tau)\alpha_{k2}+\dots+\frac{(t-\tau)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}\alpha_{kn_k},\quad k=\overline{1,p}.\end{cases} \tag{19}$$

Therefore

$$u(t,x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{ \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_k-1} i x_{k_1 j} \left(\alpha_{k_1 j} + (t-\tau)\alpha_{k_2 j+1} + \dots + \frac{(t-\tau)^{n_k-j}}{(n_k-j)!} \xi_{k n_k} \right) \right.$$
$$+ \sum_{k=p+1}^{m} i x_{k1}\alpha_{k1} + \sum_{k=1}^{p} i x_{k n_k} \xi_{k n_k} - \sum_{k=p+1}^{m} \alpha_{k1}^2 (t-\tau) - \sum_{k=1}^{p} \int\limits_{\tau}^{t} \Big((\beta-\tau)^{n_k-1} ((n_k-1)!)^{-1} \tag{20}$$
$$\left. \alpha_{k n_k} + (\beta-\tau)^{n_k-2} \alpha_{k n_{k\_}-1} ((n_k-2)!)^{-1} + \dots + \alpha_{k,1} \Big)^2 d\beta \right\} v_0(\alpha) d\alpha.$$

Since $v_0(\alpha) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n} \exp\{-i(y,\alpha)\} u_0(y) dy$, then $u(t,x) = \int\limits_{R^n} G(t-\tau, x, \xi) u_0(\xi) d\xi$, where $G(t-\tau, x, \xi)$ is FSCP. Hence, from (20) we obtain the formula $G(t-\tau, x, \xi)$.

3 THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF CAUCHY PROBLEM

For $t > \tau$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ from the formula (20) we have

$$G(t-\tau,\, x,\, \xi) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{ -\sum_{k=1}^{p} i \left[(x_{k1} - \xi_{k1})\, \alpha_{k1} + (x_{k2} - \xi_{k2} + (t-\tau)\, x_{k1}) \right. \right.$$
$$\alpha_{k2} + \dots + \left(x_{kj} - \xi_{kj} + x_{kj-1} (t-\tau) + \dots + \tfrac{(t-\tau)^{j-1}}{(j-1)!} x_{k1} \right) \alpha_{kj} + \dots + \big(x_{k n_k-1}$$
$$- \xi_{k n_k-1} + x_{k n_k-2} (t-\tau) + \dots + \tfrac{(t-\tau)^{n_k-2}}{(n_k-2)!} x_{n1} \Big) \alpha_{k n_k-1} + \big(x_{k n_k} - \xi_{k n_k} + (t-\tau) \tag{21}$$
$$\left. x_{k n_k-1} + \dots + \tfrac{(t-\tau)^{n_k-1}}{(n_k-1)!} x_{n1} \Big) \alpha_{k n_k} \right] + \sum_{k=p+1}^{m} i (x_{k1} - \xi_{k1})\, \alpha_{k1}$$
$$\left. - \sum_{k=p+1}^{m} \alpha_{k1}^2 (t-\tau) - \sum_{k=1}^{p} \int\limits_{\tau}^{t} \left(\alpha_{k1} + (\beta-\tau)\, \alpha_{k2} + \dots + \frac{(\beta-\tau)^{n_k-1}}{(n_k-1)\,!} \alpha_{k n_k} \right)^2 d\beta \right\} d\alpha.$$

In order to find (21), consider the integral

$$I_k(t-\tau, \alpha) := \int_{\tau}^{t} \left(\alpha_{k1} + (\beta-\tau)\, \alpha_{k2} + \dots + \frac{(\beta-\tau)^{n_k-1}}{(n_k-1)\,!} \alpha_{k n_k} \right)^2 d\beta. \tag{22}$$

Making the change of variables $\theta = \frac{\beta-\tau}{t-\tau}$, we have

$$I_k(t-\tau, \alpha) = (t-\tau) \int_0^1 \left(\alpha_{k1} + \theta\, (t-\tau)\, \alpha_{k2} + \dots + \frac{(\theta\,(t-\tau))^{n_k-1}}{(n_k-1)\,!} \alpha_{k n_k} \right)^2 d\theta.$$

In (21) let us replace $\alpha'_{k1} (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} = \alpha_{k1}, \dots, \alpha'_{k1} (t-\tau)^{-\frac{2n_k-1}{2}} ((n_k-1)!) = \alpha_{k n_k}$, $k = \overline{1,p}$, $\alpha'_{k1}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}} = \alpha_{k1}$, $k = \overline{p+1,m}$, and $\alpha' = \alpha$, then we obtain

$$G(t-\tau; x; \xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{ -\sum_{k=1}^{p} i \left[(x_{k1} - \xi_{k1})\, \alpha_{k1} (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} + (x_{k2} - \xi_{k2} \right. \right.$$
$$+ (t-\tau)\, x_{k1})\, \alpha_{k2} (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} + \dots + \left(x_{kj} - \xi_{kj} + (t-\tau)\, x_{kj-1} + \dots + \frac{(t-\tau)^{j-1}}{(j-1)!} x_{k1} \right)$$
$$\alpha_{kj} (t-\tau)^{-\frac{2j-1}{2}} (j-1)! + \dots + \left(x_{k n_k} - \xi_{k n_k} + (t-\tau)\, x_{k n_k-1} + \dots + \frac{(t-\tau)^{n_k-1}}{(n_k-1)!} x_{k1} \right) \tag{23}$$
$$\left. \alpha_{k n_k} (t-\tau)^{-\frac{2n_k-1}{2}} (n_k-1)! \right] - \sum_{k=p+1}^{m} (x_{k1} - \xi_{k1})\, \alpha_{k1} (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} - \sum_{k=p+1}^{m} \alpha_{k1}^2$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{p} \int_0^1 \left(\alpha_{k1} + \theta \alpha_{k2} + \dots + \theta^{n_k-1} \alpha_{k n_k} \right)^2 d\theta \right\} d\alpha\, (t-\tau)^{-\mu} \prod_{k=1}^{p} \prod_{k=0}^{n_k-1} k!,$$

where $\mu = \frac{m}{2} + \frac{\sum\limits_{k=1}^{p} (n_k-1)^2}{2}$.

Let us calculate the integral $I = \int_0^1 \left(\alpha_{k1} + \theta \alpha_{k2} + \dots + \theta^{n_k-1} \alpha_{k n_k} \right)^2 d\theta$:

$$I = \alpha_{k1}^2 + \frac{\alpha_{k2}^2}{3} + \frac{\alpha_{k3}^2}{5} + \dots + \frac{\alpha_{k n_k}^2}{2n_k-1} + \alpha_{k1}\alpha_{k2} + \dots + 2\frac{\alpha_{k1}\alpha_{kj}}{j} + \dots + 2\frac{\alpha_{k1}\alpha_{k n_k}}{n_k} + \dots$$
$$+ 2\frac{\alpha_{kj}\alpha_{k(j+\nu)}}{2j+\nu-1} + \dots + \frac{\alpha_{k n_k-1}\alpha_{k n_k}}{n_k-1}. \tag{24}$$

After making perfect squares in (24) we obtain

$$I = \left(\sum_{j=1}^{n_k} \frac{\alpha_{kj}}{j} \right)^2 + 3 \left(\sum_{j=2}^{n_k} \frac{\alpha_{kj}\, (j-1)}{j\, (j+1)} \right)^2 + 5 \left(\sum_{j=3}^{n_k} \frac{\alpha_{kj}\, (j-1)\, (j-2)}{j\, (j+1)\, (j+2)} \right)^2 + \dots + (2k_0 - 1)$$
$$\left(\sum_{j=k_0}^{n_k-1} \frac{\alpha_{kj}\, (j-1) \dots (j-k_0+1)}{j\, (j+1) \dots (j+k_0-1)} \right)^2 + \dots + (2n_k - 1) \left(\frac{\alpha_{k n_k}\, (n_k-1)!}{n_k \dots (2n_k-1)} \right)^2. \tag{25}$$

Using (25), let us make the change of variables in the integral (23)

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n_k} \frac{\alpha_{kj}}{j} = s_{k1}, \\ \sum\limits_{j=2}^{n_k} \frac{\alpha_{kj}(j-1)}{j(j+1)} = s_{k2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{j=k_0}^{n_k-1} \frac{\alpha_{kj}(j-1)\dots(j-k_0+1)}{j(j+1)\dots(j+k_0-1)} = s_{kj}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\alpha_{k n_k} (n_k-1)!}{n_k \dots (2n_k-1)} = s_{k n_k}, \qquad k = \overline{1,p}, \\ \alpha_{k1} = s_{k1}, \qquad k = \overline{p+1,m}. \end{cases} \tag{26}$$

Solving the equation (26) with respect to α, we obtain

$$\alpha_{k1}=s_{k1}-3s_{k2}+5s_{k3}-7s_{k4}+\dots+(-1)^{n_k-1}(2n_k-1)s_{kn_k},$$
$$\tfrac{\alpha_{k1}}{2\cdot 3}=s_{k2}-5s_{k3}+\tfrac{4\cdot7}{2!}s_{k4}-\tfrac{4\cdot5\cdot9}{3!}s_{k5}+\tfrac{4\cdot5\cdot6\cdot11}{4!}s_{k6}+\dots+\tfrac{(-1)^{n_k-1}}{(n_k-2)}4\cdot5\cdot\dots\cdot n_k(2n_k-1)s_{kn_k},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\tfrac{\alpha_{kj}(j-1)!}{j(j+1)\dots(2j-1)}=s_{kj}-(2j+1)s_{kj+1}+\tfrac{2j(2j+3)}{2!}s_{kj+2}-\tfrac{2j(2j+1)(2j+5)}{3!}s_{kj+3}$$
$$+\tfrac{2j(2j+1)(2j+2)(2j+7)}{4!}s_{kj+4}+\dots+\tfrac{(-1)^{\nu-j}2j(2j+1)\dots(j+\nu-2)(2\nu-1)}{(\nu-j)!}s_{k\nu}+\dots$$
$$+\tfrac{(-1)^{n_k-j}2j(2j+1)\dots(n_k+j-2)(2n_k-1)}{(n_k-j)!}s_{kn_k},\dots,$$
$$\tfrac{\alpha_{kn_k-1}(n_k-2)!}{(n_k-1)\dots(2n_k-3)}=s_{kn_k-1}-(2n_k-1)s_{kn_k},\qquad \tfrac{\alpha_{kn_k-1}(n_k-1)!}{n_k(n_k+1)(2n_k-1)}=s_{kn_k},\qquad k=\overline{1,p},$$
$$s_{k1}=\alpha_{k1},\qquad k=\overline{p+1,m}.$$

From this system we find $\alpha_{kj}(j-1)!$, $j=\overline{1,p}$, and substitute it in (23). Therefore $G(t-\tau;x;\xi)$ has the form

$$G(t-\tau;x;\xi)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\Big\{-\sum_{\nu=1}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{n_\nu}(2k-1)s_{\nu k}^2-\Big(\sum_{k=1}^{n_\nu}(-1)^{k-1}(2k-1)s_{\nu k}\Big)$$
$$i(x_{\nu1}-\xi_{\nu1})(t-\tau)^{-\frac12}-3!i(t-\tau)^{-\frac32}(x_{\nu2}-\xi_{\nu2}+(t-\tau)x_{\nu1})\Big(s_{\nu2}-5s_{\nu3}+\tfrac{4\cdot7}{2!}s_{\nu4}$$
$$-\tfrac{4\cdot5\cdot9}{3!}s_{\nu5}-\dots-\tfrac{(-1)^{n_\nu-2}}{(n_\nu-2)!}4\cdot5\dots n_\nu(2n_\nu-1)s_{\nu n_\nu}\Big)-\dots-k\dots(2k-1)(t-\tau)^{-\frac{2k-1}{2}}i$$
$$\Big(s_{\nu k}-(2k+1)s_{\nu k+1}+\tfrac{2k(2k+3)}{2!}s_{\nu k+2}-\tfrac{2k(2k+1)(2k+5)}{3!}s_{\nu k+3}+\dots+\tfrac{2k(2k+1)(2k+2)(2k+7)}{4!}$$
$$s_{\nu k+4}+\dots+(-1)^{j-k}s_{\nu j}\tfrac{2k(2k+1)\dots(j+k-2)(2j-1)}{(j-k)!}+\dots+\tfrac{(-1)^{n_\nu-k}2k(2k+1)\dots(n_\nu+k-2)(2n_\nu-1)}{(n_\nu-k)!}\tag{27}$$
$$s_{\nu n_\nu}\Big(\sum_{j=0}^{k-1}x_{\nu k-j}\tfrac{(t-\tau)^j}{j!}-\xi_{\nu k}\Big)\Big)+\dots+n_\nu(n_\nu-1)\dots(2n_\nu-1)(t-\tau)^{-\frac{(2n_\nu-1)}{2}}is_{\nu n_\nu}$$
$$-\Big(\sum_{j=0}^{n_\nu-1}x_{n_\nu-j}\tfrac{(t-\tau)^j}{j!}-\xi_{\nu n_\nu}\Big)\sum_{k=p+1}^{m}s_{k1}^2+i\sum_{k=p+1}^{m}(x_{k1}-\xi_{k1})s_{k1}(t-\tau)^{-\frac12}\Big]\Big\}ds$$
$$(t-\tau)^{-\mu}\prod_{\nu=1}^{p}\prod_{j=1}^{n_\nu}k(k+1)\dots(2k-1).$$

In (27) we group the similar terms with respect to $s_{\nu j}$, we obtain

$$G(t-\tau,x,\xi)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\Big\{-i\sum_{\nu=1}^{p}\Big[s_{\nu1}(t-\tau)^{-\frac12}(x_{\nu1}-\xi_{\nu1})+s_{\nu2}(t-\tau)^{-\frac32}3!$$
$$(x_{\nu2}-\xi_{\nu2}+(x_{\nu1}+\xi_{\nu1})(t-\tau)2^{-1})+s_{\nu3}(t-\tau)^{-\frac52}3\cdot4\cdot5(x_{\nu3}-\xi_{\nu3}+(x_{\nu2}+\xi_{\nu2})$$
$$(t-\tau)2^{-1}+(x_{\nu1}-\xi_{\nu1})(t-\tau)^2 12^{-1})+s_{\nu4}(t-\tau)^{-\frac72}4\cdot5\cdot6\cdot7(x_{\nu4}-\xi_{\nu4}$$
$$+(x_{\nu3}+\xi_{\nu3})(t-\tau)2^{-1}+(x_{\nu2}-\xi_{\nu2})(t-\tau)^2 10^{-1}+(t-\tau)^2(x_{\nu1}+\xi_{\nu1})120^{-1})+\dots$$
$$+n_\nu(n_\nu+1)\dots(2n_\nu-1)s_{\nu n_\nu}\Big(\sum_{j=0}^{n_\nu-1}x_{\nu n_\nu-j}\tfrac{(t-\tau)^j}{j!}-\xi_{\nu n_\nu}-2^{-1}(t-\tau)$$
$$\Big(\sum_{j=0}^{n_\nu-2}\tfrac{x_{\nu n_\nu-1-j}(t-\tau)^j}{j!}-\xi_{\nu n_\nu-1}\Big)+(t-\tau)^2\Big(\sum_{j=0}^{n_\nu-3}\tfrac{x_{n_\nu-2-j}(t-\tau)^j}{j!}-\xi_{\nu n_\nu-2}\Big)\tfrac{(n_\nu-2)}{4(2n_\nu-3)}+\dots\tag{28}$$
$$+(-1)^{n_\nu-k}((n_\nu-k)!)^{-1}(t-\tau)^{n_\nu-k}2k(2k+1)\dots(2k+(n_\nu-k)-2)$$
$$(2k+2(n_\nu-k)-1)(n_\nu\dots(2n_\nu-1))^{-1}\Big(\sum_{j=0}^{k-1}\tfrac{x_{\nu k-1-j}(t-\tau)^j}{j!}-\xi_{\nu k}\Big)+\dots+(-1)^{n_\nu-2}$$
$$(t-\tau)^{n_\nu-2}(x_{\nu2}-\xi_{\nu2}+(t-\tau)x_{\nu1})(2(n_\nu+1)\dots(2n_\nu-3)!)^{-1}+(-1)^{n_\nu-1}$$
$$(t-\tau)^{n_\nu-1}(x_{\nu1}-\xi_{\nu1})(n_\nu\dots(2n_\nu-2)!)^{-1}\Big)\Big]-\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{k=1}^{n_\nu}(2k-1)s_{\nu k}^2$$

$$\sum_{\nu=p+1}^{m}\Big[s_{\nu1}^2-i(x_{\nu1}-\xi_{\nu1})s_{\nu1}(t-\tau)^{-\frac12}\Big]\Big\}ds\,(t-\tau)^{-\mu}\prod_{\nu=1}^{p}\prod_{k=1}^{n_\nu}k(k+1)\dots(2k-1).$$

Analyzing (28), we obtain that $G(t-\tau,x,\xi)$ for $t>\tau$, $x\in\mathbb{R}^n$, $\xi\in\mathbb{R}^n$ is the Fourier transform of the function s

$$(2\pi)^{-\frac n2}\exp\Big\{-\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{k=1}^{n_p}(2k-1)s_{\nu k}^2-\sum_{\nu=p+1}^{m}s_{\nu1}^2\Big\}(t-\tau)^{-\mu}\prod_{\nu=1}^{p}\prod_{k=1}^{n_\nu}k(k+1)\dots(2k-1),$$

thus

$$G(t-\tau,x,\xi)=(2\sqrt{\pi})^{-n}\exp\Big\{-\sum_{\nu=1}^{m}|x_{\nu1}-\xi_{\nu1}|^2 4^{-1}(t-\tau)^{-1}-\sum_{\nu=1}^{p}3\Big[\big|x_{\nu2}-\xi_{\nu2}$$
$$+(x_{\nu1}+\xi_{\nu1})(t-\tau)2^{-1}\big|^2(t-\tau)^{-3}+180\big|x_{\nu3}-\xi_{\nu3}+(x_{\nu2}+\xi_{\nu2})(t-\tau)2^{-1}$$
$$+(x_{\nu1}-\xi_{\nu1})(t-\tau)^2 12^{-1}\big|^2(t-\tau)^{-5}+25200\big|x_{\nu4}-\xi_{\nu4}+(x_{\nu3}+\xi_{\nu3})(t-\tau)2^{-1}$$
$$+(x_{\nu2}-\xi_{\nu2})(t-\tau)^2 10^{-1}+(x_{\nu1}-\xi_{\nu1})(t-\tau)^3 120^{-1}\big|^2(t-\tau)^{-7}+\dots+(k-1)^2$$
$$k^2\dots(2k-3)^2(2k-1)(t-\tau)^{-(2k-1)}\Big|\sum_{j=0}^{k-1}\tfrac{x_{\nu k-j}(t-\tau)^j}{j!}-\xi_{\nu k}-\Big(\sum_{j=0}^{k-2}\tfrac{x_{\nu k-1-j}(t-\tau)^j}{j!}$$
$$-\xi_{\nu k-1}\Big)(t-\tau)2^{-1}+\dots+(-1)^{k-l}\tfrac{(t-\tau)^{(k-l)}}{(k-l)!}\tfrac{2l(2l+1)\dots(2l+(k-l)-2)(2l+2(k-l)-1)}{k\dots(2k-1)}$$
$$\Big(\sum_{j=0}^{l-1}\tfrac{x_{\nu l-j}(t-\tau)^j}{j!}-\xi_{\nu l}\Big)+\dots+\tfrac{(-1)^{k-2}(t-\tau)^{(k-2)}(x_{\nu2}-\xi_{\nu2}+(t-\tau)x_{\nu1})}{2(k+1)\dots(2k-3)}+\tfrac{(-1)^{k-1}(t-\tau)^{(k-1)}}{k\dots(2k-2)}\tag{29}$$
$$(x_{\nu1}-\xi_{\nu1})\Big|^2+\dots+(n_\nu-1)^2n_\nu^2(n_\nu+1)^2\dots(2n_\nu-3)^2(2n_\nu-1)(t-\tau)^{-(2n_\nu-1)}$$
$$\Big|\sum_{j=0}^{n_\nu-1}\tfrac{x_{\nu n_\nu-j}(t-\tau)^j}{j!}-\xi_{\nu n_\nu}-(t-\tau)2^{-1}\Big(\sum_{j=0}^{n_\nu-2}\tfrac{x_{\nu n_\nu-1-j}(t-\tau)^j}{j!}-\xi_{\nu n_\nu-1}\Big)+(t-\tau)^2$$
$$\Big(\sum_{j=0}^{n_\nu-3}\tfrac{x_{\nu n_\nu-2-j}(t-\tau)^j}{j!}-\xi_{\nu n_\nu-2}\Big)\tfrac{(n_\nu-2)}{4(2n_\nu-3)}+\dots+(-1)^{n_\nu-k}\Big(\sum_{j=0}^{k-1}\tfrac{x_{\nu k-j}(t-\tau)^j}{j!}-\xi_{\nu k}\Big)$$
$$\tfrac{(t-\tau)^{n_\nu-k}}{(n_\nu-k)!}\tfrac{2k\dots(n_\nu+k-2)}{n_\nu\dots(2n_\nu-2)}\Big(\sum_{j=0}^{k-1}\tfrac{x_{\nu k-j}(t-\tau)^j}{j!}-\xi_{\nu k}\Big)+\dots+\tfrac{(-1)^{n_\nu-2}(t-\tau)^{n_\nu-2}(x_{\nu2}-\xi_{\nu2}+(t-\tau)x_{\nu1})}{2(n_\nu+1)\dots(2n_\nu-3)}$$
$$+\tfrac{(-1)^{n_\nu-1}(t-\tau)^{n_\nu-1}(x_{\nu1}-\xi_{\nu1})}{n_\nu\dots(2n_\nu-3)}\Big|^2\Big]\Big\}(t-\tau)^{-\mu}\prod_{\nu=1}^{p}\prod_{k=1}^{n_\nu}k(k+1)\dots(2k-2)(2k-1)^{-\frac12}.$$

Formula (29) shows shifts on the variable x. Reducing similar members, we obtain

$$G(t-\tau,x,\xi)=2^{-n}\pi^{-\frac n2}\prod_{\nu=1}^{p}\prod_{k=1}^{n_\nu}k(k+1)\dots(2k-2)(2k-1)^{-\frac12}(t-\tau)^{-\mu}$$
$$\exp\Big\{-\sum_{\nu=1}^{m}|x_{\nu1}-\xi_{\nu1}|^2(t-\tau)^{-1}4^{-1}-\sum_{\nu=1}^{p}\Big[3\,|x_{\nu2}-\xi_{\nu2}+(x_{\nu1}+\xi_{\nu1})(t-\tau)2^{-1}|^2$$
$$(t-\tau)^{-3}+180|x_{\nu3}-\xi_{\nu3}+(x_{\nu2}+\xi_{\nu2})(t-\tau)2^{-1}++(x_{\nu1}-\xi_{\nu1})(t-\tau)^2 12^{-1}|^2$$
$$(t-\tau)^{-5}+25200\,|x_{\nu4}-\xi_{\nu4}+(x_{\nu3}+\xi_{\nu3})(t-\tau)2^{-1}+(x_{\nu2}-\xi_{\nu2})(t-\tau)^2 10^{-1}$$
$$+(x_{\nu1}-\xi_{\nu1})(t-\tau)^3 120^{-1}|^2(t-\tau)^{-7}+\dots+(t-\tau)^{-(2k-1)}(k-1)^2k^2\dots(2k-3)^2\tag{30}$$
$$(2k-1)\,|x_{\nu k}-\xi_{\nu k}+(t-\tau)(x_{\nu k-1}-\xi_{\nu k-1})2^{-1}+\dots+\Big(x_{\nu k-j}-(-1)^j\xi_{\nu k-j}\Big)$$
$$(t-\tau)^j(j+1)\dots(k+j-2)((j-1)!)^{-1}((k-1)k\dots(2k-3))^{-1}+\dots$$
$$+\Big(x_{\nu1}-(-1)^{k-1}\xi_{\nu1}\Big)(t-\tau)^{k-1}(2(k-1)k\dots(2k-3))^{-1}\Big|^2+\dots+(n_\nu-1)^2n_\nu^2\dots$$
$$(2n_\nu-3)^2(2n_\nu-1)(t-\tau)^{-(2n_\nu-1)}|x_{n_\nu}-\xi_{n_\nu}+(t-\tau)(x_{n_\nu-1}-\xi_{n_\nu-1})2^{-1}+\dots$$
$$+\Big(x_{\nu1}-(-1)^{n_\nu-1}\xi_{\nu1}\Big)(t-\tau)^{n_\nu-1}(2(n_\nu-1)\dots(2n_\nu-3))^{-1}\Big|^2\Big]\Big\},$$

where $t-\tau>0$, $x\in\mathbb{R}^n$, $\xi\in\mathbb{R}^n$.

Remark. *The results can be transferred to the Kolmogorov systems [12, 13].*

REFERENCES

[1] Kolmogorov A.N. *Zufallige Bewegungen (Zur Theorie der Brownchen Bewegung).* Ann. Math. 1934, **35**, 116–117.

[2] Hörmander L. Linear differential operators with partial derivatives. Mir, Moscow, 1965. (in Russian)

[3] Weber M. *The fundamental solution of degenerate partial differential equation of parabolic type.* Trans. Amer. Math. Soc. 1951, **1** (71), 24–37.

[4] Il'in A.M. *On a class ultraparabolic equations.* Dokl. Akad. Nauk. 1964, **6** (159), 1214–1217. (in Russian)

[5] Oleinik O.A., Radkevych E. V. *Second-order equation with nonnegative characteristic form.* J. Math. Anal. & App. 1969, **1**, 165–173. (in Russian)

[6] Malytska G.P., Eidelman S.D. *Fundamental solutions and the stabilization of the solution of the Cauchy problem for a class of degenerate parabolic equations.* Differ. Eq. 1975, **7** (11), 1316–1330. (in Russian)

[7] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Malytska G.P. *A modified Levi method: development and application.* Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Priridozn.Tekh. Nauki. 1998, **5**, 14–19. (in Ukrainian)

[8] Eidelman S.D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N. Analytic methods in the theory of differential and pseudodifferential equations of parabolic type. Basel, Birkhäuser, 2004.

[9] Ivasyshen S.D., Pasichnik G.S. *On the Cauchy problem for $\overrightarrow{2b}$-parabolic systems with growing coefficients.* Ukrainian Math. J. 2000, **52** (11), 1691–1705. doi:10.1023/A:1010427120130 (translation of Ukrain. Mat. Zh. 2000, **52** (11), 1484–1496. (in Ukrainian))

[10] Malytska G.P. *Construction of the fundamental solution of Cauchy problem for the diffusion equation with variable inertia.* Math. Methods Phys. Mech. Fields 1999, **3** (42), 56–60. (in Ukrainian)

[11] Malytska G.P. *On the structure of the fundamental solution of the Cauchy problem for elliptic-parabolic equations generalize the diffusion equation with inertia.* Bull. National Univ. "Lviv Polytechnik" 2000, **411**, 221–228. (in Ukrainian)

[12] Malytska G.P. *Systems of equations of Kolmogorov type.* Ukrainian Math. J. 2008, **60** (12), 1937–1954. doi: 10.1007/s11253-009-0182-4 (translation of Ukrain. Mat. Zh. 2008, **60** (12), 1650–1663. (in Ukrainian))

[13] Malytska G.P.*Fundamental solution matrix of the Cauchy problem for a class of systems of Kolmogorov type equations.* Differ. Eq. 2010, **46** (5), 753–757. (in Russian)

Received 25.08.2014

Малицька Г.П., Буртняк І.В. *Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного рівняння типу рівняння дифузії з інерцією* // Карпатські матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 320–328.

В роботі знайдено явний вигляд фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння типу Колмогорова, що має скінченну кількість груп просторових змінних, за якими є виродження параболічності.

Ключові слова і фрази: рівняння Колмогорова, фундаментальний розв'язок, вироджені параболічні рівняння.

Малицкая А.П., Буртняк И.В. *Фундаментальный решение задачи Коши для одного уравнения типа уравнения диффузии с инерцией* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 320–328.

В работе найдено явный вид фундаментального решения задачи Коши для уравнения типа Колмогорова, имеющий конечное количество групп пространственных переменных, по которым есть вырождение параболичности.

Ключевые слова и фразы: уравнение Колмогорова, фундаментальное решение, вырожденные параболические уравнения.

ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, 6 (2), 329–336
doi:10.15330/cmp.6.2.329-336

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.329–336

МАСЛЮЧЕНКО В.К., МИРОНИК О.Д.

ПРО НЕПЕРЕРВНІСТЬ *KC*-ФУНКЦІЙ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В ПЛОЩИНІ СІДРА

Показано, що площина Сідра $\mathbb{M}$ — це σ-метризовний простір, який не має розвинення. У кожної квазінеперервної функції $f : X \to \mathbb{M}$ множина $C(f)$ точок неперервності залишкова в X. Досліджено множину $C(f)$ для функцій $f : X \times Y \to \mathbb{M}$, які квазінеперервні відносно першої змінної і неперервні відносно другої змінної.

Ключові слова і фрази: неперервність, квазінеперервність, *KC*-функція.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 2 Kotsjubynskyi str., 58012, Chernivtsi, Ukraine

ВСТУП

Площина Сідра $\mathbb{M}$, що була введена Дж. Сідром [2, приклад 9.1] і узагальнена в праці [10], — це вичерпний і неметризовний простір. В останні роки активізувалося вивчення множини $C(f)$ точок неперервності нарізно неперервних відображень зі значеннями у просторах, близьких до метризовних (див. [8] і вказану там літературу), отож надійшла черга і до відображень зі значеннями в $\mathbb{M}$. Так у [12] було досліджено множину $C(f)$ для нарізно неперервних відображень $f : X_1 \times ... \times X_n \to \mathbb{M}$, визначених на добутках зв'язних топологічних просторів. Застосований там метод полягав у тому, що на основі зв'язності образу $f(X_1 \times ... \times X_n)$ доводилося, що f набуває значень в одній з компонент зв'язності простору $\mathbb{M}$, а всі вони гомеоморфні числовій прямій $\mathbb{R}$. Між тим, при дослідженні множини $C(f)$ у нарізно неперервних відображень зі значеннями в $\mathbb{R}$, чи загальніше, в метризовних просторах Z, спочатку вивчають її для так званих *KC*-функцій $f : X \times Y \to Z$, які квазінеперервні відносно першої і неперервні відносно другої змінних, а потім розглядають функцію $f(x_1, ..., x_n)$ від n змінних як функцію $f(x, y)$ від двох змінних $x = (x_1, ..., x_{n-1})$ і $y = x_n$, адже часто нарізно неперервні відображення виявляються квазінеперервними. Тому природно виникло питання про множину $C(f)$ для *KC*-функцій $f : X \times Y \to \mathbb{M}$, яке і досліджується у цій праці. Крім того, добре відомо [13], що у квазінеперервних функцій $f : X \to Y$ зі значеннями в метризовному просторі Y множина $C(f)$ залишкова в X. Тому постало питання: чи буде $C(f)$ залишковою множиною і для квазінеперервних відображень $f : X \to \mathbb{M}$? З допомогою властивості зліченності ланцюжків чи інакше властивості Сусліна [11], [3, с.103] ми доводимо структурну теорему для квазінеперервних відображень $f : X \to \mathbb{M}$, з якої легко виводиться залишковість множини $C(f)$ для таких відображень. Ця ж властивість відіграє важливу роль і в дослідженні на сукупну неперервність *KC*-функцій $f : X \times Y \to \mathbb{M}$. Попередні версії отриманих тут результатів були анонсовані в тезах [9].

УДК 517.51
2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C30, 54E35.

У працях [5–7] були отримані загальні теореми про сукупну неперервність нарізно неперервних відображень та їх аналогів зі значеннями в сильно σ-метризовних просторах, σ-метризовних просторах та просторах Мура. Щоб ними скористатися, постало питання: у який з цих класів входить площина Сідра? Тут ми з'ясовуємо, що площина Сідра $\mathbb{M}$ є σ-метризовним простором, але не має розвинення, отже, не є простором Мура. Питання про те, чи буде $\mathbb{M}$ сильно σ-метризовним залишається відкритим. З того, що $\mathbb{M}$ — це σ-метризовний простір, випливає [5], що для довільного топологічного простору у кожного квазінеперервного відображення $f : X \to \mathbb{M}$ множина $C(f)$ буде залишковою.

1 Квазінеперервні функції зі значеннями в $\mathbb{M}$

Функція $f : X \to Y$ називається *квазінеперервною* в точці x_0, якщо для довільного околу V точки $y_0 = f(x_0)$ у просторі Y і для довільного околу U точки x_0 в X існує така відкрита непорожня множина G в просторі X, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$, і просто *квазінеперервною*, якщо вона є такою у кожній точці простору X. Множину A в топологічному просторі X ми називатимемо *квазівідкритою*, якщо $A \subseteq \overline{\operatorname{int} A}$.

Наступне твердження є характеризацією квазінеперервності.

Твердження 1.1. *Функція $f : X \to Y$ буде квазінеперервною тоді і тільки тоді, коли прообраз $f^{-1}(V)$ довільної відкритої множини V в просторі Y є квазівідкритою множиною в просторі X.*

Доведення. Необхідність. Нехай f — квазінеперервне відображення, V — довільна відкрита множина в просторі Y. Покладемо $A = f^{-1}(V)$ і покажемо, що множина A є квазівідкритою в просторі X. Для цього з'ясуємо, що $A \subseteq \overline{\operatorname{int} A}$. Візьмемо $x_0 \in A$ і покажемо, що $x_0 \in \overline{\operatorname{int} A}$. Ясно, що $y_0 = f(x_0) \in V$. Оскільки множина V відкрита, то вона є околом точки y_0. Нехай U — довільний окіл точки x_0 в X. З квазінеперервності функції f випливає, що існує така відкрита непорожня множина G в просторі X, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$. Оскільки множина G відкрита і $G \subseteq f^{-1}(V) = A$, то $G \subseteq \operatorname{int} A$. Отже, $\varnothing \neq G \subseteq U \cap \operatorname{int} A$. З того, що U — довільний окіл точки x_0, отримуємо, що $x_0 \in \overline{\operatorname{int} A}$. Отже, множина A квазівідкрита.

Достатність. Нехай $f : X \to Y$ — таке відображення, що для довільної відкритої множини V в просторі Y її прообраз $f^{-1}(V)$ є квазівідкритою множиною в просторі X. Візьмемо довільну точку $x_0 \in X$ і доведемо, що f квазінеперервне в точці x_0. Нехай V — довільний відкритий окіл точки $y_0 = f(x_0)$ в просторі Y і U — довільний відкритий окіл точки x_0 в просторі X. За припущенням, прообраз $A = f^{-1}(V)$ — квазівідкрита множина в просторі X. Оскільки $y_0 \in V$, то $x_0 \in A$. Множина A квазівідкрита, тобто $A \subseteq \overline{\operatorname{int} A}$, а значить, $x_0 \in \overline{\operatorname{int} A}$. Тому $U \cap \operatorname{int} A \neq \varnothing$. Покладемо $G = U \cap \operatorname{int} A$. Множина G відкрита, непорожня, $G \subseteq U$ і $G \subseteq \operatorname{int} A \subseteq A$, а, отже, $f(G) \subseteq V$. Тому відображення f квазінеперервне в точці x_0. □

Ми будемо використовувати наступний добре відомий результат з [13].

Теорема 1. *Нехай X — топологічний простір, Y — метризовний простір і $f : X \to Y$ — квазінеперервне відображення. Тоді $C(f)$ — залишкова множина.*

Нагадаємо, що *площиною Сідра* $\mathbb{M}$ ми називаємо топологічний простір, що складається з точок півплощини $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$, топологічна структура на якому вводиться так: множина W буде околом точки $p = (x, y)$ з $y > 0$ в $\mathbb{M}$, якщо існує таке $\varepsilon \in (0, y)$, що $W_\varepsilon(p) = \{x\} \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subseteq W$, і околом точки $p = (x, 0)$ в $\mathbb{M}$, якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що $W_\varepsilon(p) = ((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times [0, \varepsilon)) \setminus (\{x\} \times (0, \varepsilon)) \subseteq W$.

Позначимо $M_x = \{x\} \times (0, +\infty)$, де $x \in \mathbb{R}$ і $L_0 = \mathbb{R} \times \{0\}$, і зауважимо, що відображення $\varphi : \mathbb{R} \to L_0$, для якого $\varphi(x) = (x, 0)$, і всі відображення $\psi_x : (0, +\infty) \to M_x$ такі, що $\psi_x(y) = (x, y)$, є гомеоморфізмами. В [12] було показано, що площина Сідра $\mathbb{M}$ подається у вигляді

$$\mathbb{M} = L_0 \sqcup \bigsqcup_{x \in \mathbb{R}} M_x \tag{1}$$

диз'юнктного об'єднання своїх відкрито-замкнених зв'язних підпросторів M_x та замкненого зв'язного підпростору L_0, які є разом з тим компонентами зв'язності площини Сідра.

Нам буде потрібне таке просте твердження.

Лема 1.1. *Нехай $(A_n)_{n=1}^\infty$, $(B_n)_{n=1}^\infty$ і $(C_n)_{n=1}^\infty$ — три послідовності підмножин топологічного простору X, причому $X = \bigsqcup_{n=1}^\infty A_n$ і для кожного n виконуються наступні умови $C_n \subseteq B_n \subseteq A_n$, $A_n \setminus B_n$ — ніде не щільні множини в X, а множини C_n залишкові в B_n. Тоді множина $C = \bigsqcup_{n=1}^\infty C_n$ є залишковою в X.*

Доведення. За умовою для кожного n різниця $B_n \setminus C_n$ є множиною першої категорії в B_n, а значить, і в X. Тому і множина $L = \bigsqcup_{n=1}^\infty (B_n \setminus C_n)$ — це множина першої категорії в X. Інше об'єднання $M = \bigsqcup_{n=1}^\infty (A_n \setminus B_n)$ — це теж множина першої категорії в X. Зрозуміло, що $X = \bigsqcup_{n=1}^\infty A_n = \bigsqcup_{n=1}^\infty B_n \sqcup M = \bigsqcup_{n=1}^\infty C_n \sqcup L \sqcup M = C \sqcup L \sqcup M$, причому $L \sqcup M$ — це множина першої категорії в X. Тому C — залишкова в X. □

Кажуть, що топологічний простір X *має властивість зліченності ланцюжків* чи інакше *властивість Сусліна*, якщо довільна диз'юнктна система відкритих непорожніх множин простору X є не більш, ніж зліченна.

Теорема 2. *Нехай X — топологічний простір з властивістю зліченності ланцюжків і $f : X \to \mathbb{M}$ — квазінеперервне відображення, $A_u = f^{-1}(M_u)$ для кожного $u \in \mathbb{R}$, $B = f^{-1}(L_0)$, $G = \operatorname{int}\overline{B}$ і $G_u = \operatorname{int} A_u$. Тоді:*

(i) множина $E = \{u \in \mathbb{R} : G_u \neq \varnothing\}$ не більш ніж зліченна, множина $W = G \sqcup (\bigsqcup_{u \in E} G_u)$ відкрита і залишкова в X і $f(G) \subseteq L_0$, а $f(G_u) \subseteq M_u$ для кожного $u \in \mathbb{R}$;

(ii) множина $C(f)$ залишкова в X.

Доведення. (*i*) Оскільки множини M_u відкриті в $\mathbb{M}$, то за твердженням 1.1 A_u — квазівідкриті в X. Множини G_u відкриті, і оскільки $f(G_u) \cap f(G_v) \subseteq M_u \cap M_v = \varnothing$ при $u \neq v$, то $G_u \cap G_v = \varnothing$, якщо $u \neq v$. Крім того, $G_u \subseteq A_u \subseteq \overline{G}_u$. Зауважимо, що $A_u \neq \varnothing$ тоді і тільки тоді, коли $G_u \neq \varnothing$. Оскільки множини G_u утворюють систему відкритих попарно диз'юнктних множин в X, а простір X має властивість зліченності ланцюжків, то множина $E = \{u \in \mathbb{R} : G_u \neq \varnothing\}$ не більш ніж зліченна.

Покажемо тепер, що $G \subseteq B$. Якби це було не так, то існував би такий елемент x_0, що $x_0 \in G$ і $x_0 \notin B$. Тоді $y_0 = f(x_0) \notin L_0$. А значить, $y_0 \in M_{u_0}$ для деякого $u_0 \in \mathbb{R}$. Множина M_{u_0} відкрита в $\mathbb{M}$, отже, є околом кожної своєї точки, зокрема, точки y_0. Тому, оскільки множина G є околом точки x_0, а функція f квазінеперервна, існує така відкрита і непорожня множина H, що міститься в G і $f(H) \subseteq M_{u_0}$. З того, що $H \subseteq G \subseteq \overline{B}$, випливає, що $H \cap B \neq \varnothing$. Але це неможливо, бо $f(H) \subseteq M_{u_0}$, $f(B) \subseteq L_0$ і $M_{u_0} \cap L_0 = \varnothing$. Отримана суперечність показує, що $G \subseteq B$.

Із зображення площини Сідра $\mathbb{M}$ у вигляді (1) випливає, що $X = B \sqcup (\bigsqcup_{u\in E} A_u)$. Множина $W = G \sqcup (\bigsqcup_{u\in E} G_u)$ відкрита, як об'єднання відкритих множин.

Зауважимо, що

$$B \setminus G \subseteq \overline{B} \setminus \mathrm{int}\overline{B} = \mathrm{fr}\,\overline{B} \quad \text{і} \quad A_u \setminus G_u \subseteq \overline{G}_u \setminus G_u = \mathrm{fr}\,G_u.$$

Множини $\mathrm{fr}\overline{B}$ і $\mathrm{fr}G_u$ ніде не щільні як межі замкненої і відкритих множин. Тому і різниці $B \setminus G$ та $A_u \setminus G_u$ — це ніде не щільні множини. Оскільки $X \setminus W = (B \setminus G) \sqcup \bigsqcup_{u\in E} (A_u \setminus G_u)$ і множина E не більш ніж зліченна, то $X \setminus W$ — це множина першої категорії. Таким чином, W — відкрита залишкова множина в просторі X. Включення $f(G) \subseteq L_0$ випливає з того, що $G \subseteq B = f^{-1}(L_0)$, так само $f(G_u) \subseteq M_u$, бо $G_u \subseteq A_u = f^{-1}(M_u)$.

(ii) Оскільки множини G та G_u відкриті, то звуження $g = f|_G$ і $g_u = f|_{G_u}$ будуть квазінеперервними разом з f. При цьому $g(G) \subseteq L_0$ і $g_u(G_u) \subseteq M_u$, отже, g і g_u набувають значень у метризовних просторах L_0 і M_u. За теоремою 1 множина $C(g)$ буде залишковою в G, а множини $C(g_u)$ — залишкові в G_u для всіх $u \in E$. На основі відкритості G і G_u матимемо, що $C(g) = C(f) \cap G$ і $C(g_u) = C(f) \cap G_u$ для кожного $u \in E$. При цьому множини $B \setminus G$ і $A_u \setminus G_u$ ніде не щільні, отже, за лемою 1.1 множина

$$C = C(g) \sqcup (\bigsqcup_{u\in E} C(g_u))$$

є залишковою в X. Але

$$C = (C(f) \cap G) \sqcup (\bigsqcup_{u\in E} (C(f) \cap G_u)) = C(f) \cap W \subseteq C(f),$$

отже, і множина $C(f)$ залишкова в X. □

2 KC-ФУНКЦІЇ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В $\mathbb{M}$

Наведемо деякі позначення і означення, які нам будуть потрібні в цьому пункті.

Для функції $f : X \times Y \to Z$ і точки $p = (x, y) \in X \times Y$ покладемо $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$. Функція $f : X \times Y \to Z$ називається *KC-функцією*, якщо для кожного $x \in X$ функція $f^x : Y \to Z$ неперервна і для кожного $y \in Y$ функція $f_y : X \to Z$ квазінеперервна. Сукупність усіх таких функцій ми позначаємо символом $KC(X \times Y, Z)$.

Система $\mathcal{V}$ непорожніх відкритих множин називається *псевдобазою* топологічного простору X, якщо для кожної непорожньої відкритої в X множини G існує такий елемент $V \in \mathcal{V}$, що $V \subseteq G$. Якщо у просторі X є не більш ніж зліченна псевдобаза, то він сепарабельний, а кожний сепарабельний простір має властивість зліченності ланцюжків.

Нам знадобиться теорема, яка випливає з результатів праці [4].

Теорема 3. *Нехай X і Y — топологічні простори, Z — метризовний простір і $f \in KC(X \times Y, Z)$. Тоді:*

(i) якщо Y задовольняє першу аксіому зліченності, то для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ залишкова в X;

(ii) якщо Y задовольняє другу аксіому зліченності, то множина $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$ залишкова в X.

Теорема 4. *Нехай X — топологічний простір, який має не більш ніж зліченну псевдобазу, Y — зв'язний берівський простір і $f : X \times Y \to \mathbb{M}$ — KC-функція. $A_u = \{x \in X : f^x(Y) \subseteq M_u\}$ для $u \in \mathbb{R}$, $B = f^{-1}(L_0)$, $G_u = \mathrm{int}A_u$ і $H = \mathrm{int}\overline{B}$. Тоді:*

(i) $A_u = f_{y_0}^{-1}(M_u)$ для довільного $y_0 \in Y$ і кожного $u \in \mathbb{R}$;

(ii) $B = A \times Y$ для деякої множини $A \subseteq X$ і $H = G \times Y$, де $G = \mathrm{int}\overline{A}$, причому $H \subseteq B$;

(iii) множина $E = \{u \in \mathbb{R} : G_u \neq \varnothing\}$ не більш, ніж зліченна, а множина $W = G \sqcup (\bigsqcup_{u\in E} G_u)$ відкрита і залишкова в X, при цьому $f(G \times Y) \subseteq L_0$, а $f(G_u \times Y) \subseteq M_u$ для кожного $u \in E$;

(iv) якщо Y задовольняє першу аксіому зліченності, то для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ залишкова в X;

(v) якщо Y задовольняє другу аксіому зліченності, то множина $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$ залишкова в X.

Доведення. (i) Візьмемо $y_0 \in Y$, $u \in \mathbb{R}$ і доведемо, що $A_u = f_{y_0}^{-1}(M_u)$. Покажемо спершу, що $A_u \subseteq f_{y_0}^{-1}(M_u)$. Візьмемо деяку точку $x_0 \in A_u$. Для неї $f^{x_0}(Y) \subseteq M_u$, зокрема, $f_{y_0}(x_0) = f^{x_0}(y_0) \in M_u$, отже, $x_0 \in f_{y_0}^{-1}(M_u)$. Покажемо тепер, що $f_{y_0}^{-1}(M_u) \subseteq A_u$. Візьмемо $x_0 \in f_{y_0}^{-1}(M_u)$, тоді $z_0 = f_{y_0}(x_0) = f^{x_0}(y_0) \in f^{x_0}(Y)$. Функція f^{x_0} неперервна, простір Y зв'язний, отже, образ $f^{x_0}(Y)$ є зв'язною множиною. Оскільки M_u — компонента зв'язності і $z_0 \in M_u \cap f^{x_0}(Y)$, то обов'язково мусить $f^{x_0}(Y) \subseteq M_u$. Отже, $x_0 \in A_u$.

(ii) Покажемо, що $B = A \times Y$, де A — деяка множина в X. Справді, нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in B$, тоді $f(p_0) \in L_0$. Перевіримо, що $\{x_0\} \times Y \subseteq B$. Будемо міркувати від супротивного. Припустимо, що існує така точка $y_1 \in Y$, що $(x_0, y_1) \notin B$. Тоді $f(x_0, y_1) \notin L_0$, а значить, існує такий індекс $u_1 \in \mathbb{R}$, що $f(x_0, y_1) \in M_{u_1}$. Оскільки M_{u_1} — компонента зв'язності площини Сідра $\mathbb{M}$ і $M_{u_1} \cap f^{x_0}(Y) \neq \varnothing$, а множина $f^{x_0}(Y)$ зв'язна, то обов'язково $f^{x_0}(Y) \subseteq M_{u_1}$. Але $f^{x_0}(y_0) = f(p_0) \in L_0$, отже, $f^{x_0}(y_0) \notin M_{u_1}$, а значить, $f^{x_0}(Y) \nsubseteq M_{u_1}$, що приводить до суперечності. Тепер зрозуміло, що для множини $A = \mathrm{pr}_X(B)$ будемо мати, що $A \times Y = B$. Тоді $\overline{B} = \overline{A} \times Y$ і $H = \mathrm{int}\overline{B} = G \times Y$, де $G = \mathrm{int}\overline{A}$.

Покажемо тепер, що $H \subseteq B$. Припустимо, що це не так, тобто існує точка $p_0 = (x_0, y_0) \in H \setminus B$. Оскільки $p_0 \notin B$, то $z_0 = f(p_0) \notin L_0$, а, отже, існує індекс $u_0 \in \mathbb{R}$, такий, що $z_0 \in M_{u_0}$. Оскільки $p_0 \in H$ і множина H відкрита в $X \times Y$, то існують такі околи $\widetilde{U}$ і $\widetilde{V}$ точок x_0 і y_0 у просторах X і Y відповідно, що $\widetilde{U} \times \widetilde{V} \subseteq H$. З неперервності відображення f^{x_0} у точці y_0 і відкритості M_{u_0} в площині Сідра випливає, що існує такий відкритий окіл V точки y_0 в просторі Y, що $f^{x_0}(V) \subseteq M_{u_0}$ і $V \subseteq \widetilde{V}$. Оскільки $f_y(x_0) \in M_{u_0}$ для кожного

$y \in V$, то з квазінеперервності f_y у точці x_0 випливає, що для кожного $y \in V$ існує така відкрита непорожня в X множина O_y, що $O_y \subseteq \widetilde{U}$ і $f_y(O_y) \subseteq M_{u_0}$.

За умовою простір X має не більш ніж зліченну псевдобазу $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. Для кожного номера n розглянемо множини

$$B_n = \{y \in V : U_n \subseteq O_y\}.$$

Ясно, що $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = V$, бо $\mathcal{U}$ — це псевдобаза в X, а множини O_y відкриті в X. Оскільки простір Y берівський, то його відкрита непорожня множина V є множиною другої категорії в Y. Тому існує такий номер m, що множина B_m десь щільна, тобто $\mathrm{int}\overline{B_m} \neq \varnothing$. Покладемо $V_0 = V \cap \mathrm{int}\overline{B}_m$ і $B_0 = V_0 \cap B_m$. Оскільки V_0 — відкрита множина в X, $V_0 \subseteq \overline{B}_m$, то $V_0 \subseteq \overline{B_0}$. Крім того, множина $\widetilde{V}_m = \mathrm{int}\overline{B}_m$ відкрита і непорожня в Y і $\widetilde{V}_m \subseteq \overline{B}_m$. Тому $\widetilde{V}_m \subseteq \overline{\widetilde{V}_m \cap B_m}$, отже, $\widetilde{V}_m \cap B_m \neq \varnothing$. Але $B_m \subseteq V$, тому $\widetilde{V}_m \cap B_m \subseteq \widetilde{V}_m \cap V = V_0$, звідки випливає, що множина V_0 відкрита і непорожня, а тому $B_0 \neq \varnothing$. До того ж ясно, що $V_0 \subseteq V$.

Покладемо $U_0 = U_m$. Для кожного $y \in B_0$ будемо мати, що $y \in B_m$, а значить, $U_0 = U_m \subseteq O_y$, звідки випливає, що $f_y(U_0) \subseteq f_y(O_y) \subseteq M_{u_0}$. Це показує, що $f(U_0 \times B_0) \subseteq M_{u_0}$. Для кожного $x \in U_0$ відображення $f^x : Y \to \mathbb{M}$ неперервне, отже,

$$f^x(V_0) \subseteq f^x(\overline{B_0}) \subseteq \overline{f^x(B_0)} \subseteq \overline{f(\{x\} \times B_0)} \subseteq \overline{f(U_0 \times B_0)} \subseteq \overline{M}_{u_0} = M_{u_0}.$$

Тому, $f(U_0 \times V_0) = \bigcup\limits_{x\in U_0} f^x(V_0) \subseteq M_{u_0}$. Множина $O = U_0 \times V_0$ відкрита і непорожня. Взявши довільний елемент $y \in B_0$, ми отримаємо, що $U_0 = U_m \subseteq O_y \subseteq \widetilde{U}$, адже $y \in B_m$. Крім того, $V_0 \subseteq V \subseteq \widetilde{V}$. Таким чином, $O \subseteq \widetilde{U} \times \widetilde{V} \subseteq H \subseteq \overline{B}$. Тому $O \cap B \neq \varnothing$, отже, існує точка $p \in O \cap B$, для якої $f(p) \in L_0$. Але це неможливо, бо $f(O) \subseteq M_{u_0}$, а $M_{u_0} \cap L_0 = \varnothing$.

(iii) Зауважимо, що відкриті множини G_u диз'юнктні, бо такими є множини A_u, тому множина E не більш ніж зліченна, адже простір X має властивість зліченності ланцюжків, бо він має не більш ніж зліченну псевдобазу. За умовою теореми, $G_u \subseteq A_u$ для кожного $u \in E$ і $f(A_u \times Y) \subseteq M_u$, тому $f(G_u \times Y) \subseteq f(A_u \times Y) \subseteq M_u$. Оскільки $G \times Y = H \subseteq B = A \times Y$, то $f(G \times Y) \subseteq f(A \times Y) \subseteq L_0$. Множина $W = G \sqcup \bigsqcup\limits_{u\in E} G_u$ відкрита, як об'єднання відкритих множин. Зауважимо, що з умови (i) та твердження 1.1 випливає, що множини A_u є квазівідкритими, а тому $A_u \subseteq \overline{G}_u$. Звідси маємо, що $A_u \setminus G_u \subseteq \overline{G}_u \setminus G_u = \mathrm{fr}G_u$. Подібним чином, $A \setminus G = A \setminus \mathrm{int}\overline{A} \subseteq \overline{A} \setminus \mathrm{int}\overline{A} = \mathrm{fr}\overline{A}$. Оскільки множини $\mathrm{fr}G_u$ та $\mathrm{fr}\overline{A}$ є ніде не щільними, то такими ж будуть і їх підмножини $A \setminus G$ та $A_u \setminus G_u$ для кожного $u \in \mathbb{R}$. Із зображення площини Сідра (1) випливає, що $X = A \sqcup (\bigsqcup\limits_{u\in E} A_u)$. Тому $X \setminus W = (A \sqcup \bigsqcup\limits_{u\in E} A_u) \setminus (G \sqcup \bigsqcup\limits_{u\in E} G_u) = (A \setminus G) \sqcup (\bigsqcup\limits_{u\in E} A_u \setminus G_u)$ — множина першої категорії, як зліченне об'єднання ніде не щільних множин. Отже, множина W є залишковою в X.

(iv) Нехай простір Y задовольняє першу аксіому зліченності. Розглянемо відображення $g_u = f|_{G_u \times Y}$ та $g = f|_{G\times Y}$, які є KC-функціями, як звуження KC-функції на відкриту множину. При цьому $g_u(G_u \times Y) \subseteq M_u$ і $g(G \times Y) \subseteq L_0$, тобто відображення g та g_u набувають значень у метризовних просторах M_u та L_0. За теоремою 3 (i) маємо, що множини $C_y(g_u)$ та $C_y(g)$ є залишковими в G_u та G відповідно. Множини G_u та G відкриті, отже, $C_y(g_u) = C_y(f) \cap G_u$ і $C_y(g) = C_y(f) \cap G$. Оскільки множини $A \setminus G$ та $A_u \setminus G_u$ є ніде не щільними, то за лемою 1.1 множина $C = C_y(g) \sqcup (\bigsqcup\limits_{u\in E} C_y(g_u))$ є залишковою в X. Крім того, $C = (C_y(f) \cap G) \sqcup (\bigsqcup\limits_{u\in E}(C_y(f) \cap G_u) = C_y(f) \cap W$, отже, $C \subseteq C_y(f)$. Звідси випливає, що множина $C_y(f)$ сама є залишковою в X.

(v) Нехай простір Y задовольняє другу аксіому зліченності. Розглянувши ті ж відображення $g_u = f|_{G_u\times Y}$ та $g = f|_{G\times Y}$, які є KC-функціями, як звуження KC-функції на відкриту множину, і міркуючи аналогічно до доведення властивості (iv), на основі твердження (ii) теореми 3 можна довести, що множина $C_Y(f)$ є залишковою в просторі X. □

3 ПЛОЩИНА СІДРА І σ-МЕТРИЗОВНІ ПРОСТОРИ ТА ПРОСТОРИ МУРА

Нагадаємо, що топологічний простір Z називається *σ-метризовним* (*сильно σ-метризовним*), якщо існує така зростаюча послідовність його замкнених метризовних підпросторів Z_n, що $Z = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$ (і для кожної збіжної в Z послідовності точок z_k існує таке n, що $\{z_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq Z_n$). Така послідовність підпросторів $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ називається *вичерпуванням* σ-метризовного чи сильно σ-метризовного простору Z.

Теорема 5. *Площина Сідра $\mathbb{M}$ — це σ-метризовний простір з вичерпуванням $Z_n = \{(x, y) \in \mathbb{M} : x \in \mathbb{R}$ і $y = 0$ або $y \geq \frac{1}{n}\}$.*

Доведення. Розглянемо підпростори $L_0 = \mathbb{R} \times \{0\}$ і $M_{x,n} = \{x\} \times [\frac{1}{n}, +\infty)$ площини Сідра $\mathbb{M}$. Очевидно, що простір L_0 гомеоморфний до $\mathbb{R}$, а простори $M_{x,n}$ гомеоморфні до $[\frac{1}{n}, +\infty)$, отже, як L_0, так і $M_{x,n}$ — це метризовні простори. Ясно, що

$$Z_n = L_0 \sqcup \bigsqcup_{x\in\mathbb{R}} M_{x,n},$$

причому з означення топологічної структури простору $\mathbb{M}$ легко випливає, що Z_n — це пряма сума просторів L_0 і $M_{x,n}$, де $x \in \mathbb{R}$. Але пряма сума метризовних просторів теж буде метризовним простором [3, с. 384, теорема 4.2.1], отже, всі підпростори Z_n простору $\mathbb{M}$ метризовні. Крім того, вони, очевидно, замкнені і $Z_n \subseteq Z_{n+1}$ для кожного n. Таким чином, послідовність $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ — це вичерпування σ-метризовного простору $\mathbb{M}$. □

Зауважимо, що побудована в теоремі 5 послідовність просторів Z_n не буде вичерпуванням $\mathbb{M}$ як сильно σ-метризовного простору. Справді, легко перевірити, що послідовність точок $z_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ збігається до точки $0 = (0,0)$ в $\mathbb{M}$, але $\{z_k : k \in \mathbb{N}\} \not\subseteq Z_n$ для кожного номера n. Авторам невідомо, чи буде $\mathbb{M}$ сильно σ-метризовним простором.

З теореми 5 і теореми 2 статті [5] негайно випливає такий результат

Теорема 6. *Для кожного топологічного простору X у довільного квазінеперервного відображення $f : X \to \mathbb{M}$ множина $C(f)$ залишкова в X.*

Нагадаємо, що *розвиненням* топологічного простору Z називається така послідовність його відкритих покриттів $\mathcal{W}_n$, що для кожного $z \in Z$ послідовність множин

$$\mathrm{st}_{\mathcal{W}_n}(z) = \bigcup\{W : z \in W \in \mathcal{W}_n\}$$

утворює базу околів точки z в Z. *Простір Мура* — це регулярний простір з розвиненням.

Теорема 7. *Площина Сідра $\mathbb{M}$ не має розвинення, отже, не є простором Мура.*

Доведення. Справді, $\mathbb{M}$ як вичерпний гаусдорфовий простір [2] буде паракомпактом [1], а кожний паракомпакт є колективно нормальним простором [3, с. 453, теорема 5.1.18]. Якби у $\mathbb{M}$ було розвинення, то за метризаційним критерієм Бінґа [3, с. 488, теорема 5.4.1] простір $\mathbb{M}$ мав би бути метризовним, а це не так [2, 10]. □

References

[1] Borges C. *On stratifiable spaces*. Pacific J. Math. 1966, **17** (1), 1–16. doi:10.2140/pjm.1966.17.1

[2] Ceder J. *Some generalizations of metric spaces*. Pacific J. Math. 1961, **11**, 105–126.

[3] Engelking R. General topology. Mir, Moscow, 1986. (in Russian)

[4] Maslyuchenko V.K. *Hahn Spaces and Dini's Problem*. J. Math. Sci. 2001, **107** (1), 3577–3582. doi: 10.1023/A:1011990123042 (translation of Math. Methods Phys. Mech. Fields. 1998, **41** (4), 39–45. (in Ukrainian))

[5] Maslyuchenko V.K., Filipchuk O.I. *Pointwise discontinuity of K_hK-functions with values in σ-metrizable spaces*. Sci. Bull. Chernivtsi Univ. 2004, **191–192**, 103–106. (in Ukrainian)

[6] Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V., Filipchuk O.I. *Joint continuity of K_hC-functions with values in Moore spaces*. Ukrainian Math. J. 2008, 60 (11), 1803–1812. doi:10.1007/s11253-009-0170-8 (translation of Ukrain. Mat. Zh. 2008, **60** (11), 1539–1547. (in Ukrainian))

[7] Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V., Shyshyna O.I. *Joint continuity of horizontally quasicontinuous mappings with values in σ-metrizable spaces*. Math. Methods Phys. Mech. Fields 2002, **45** (1), 42–46. (in Ukrainian)

[8] Maslyuchenko V., Myronyk O. *Joint continuity of mappings with values in generalized metric spaces*. In: Proc. of Sci. Conf. "Modern problems of probability and mathematical analysis", Vorokhta, Ukraine, 20–26 February, 2012, Precarpathian Univ., Ivano-Frankivsk, 2012, 5–6. (in Ukrainian)

[9] Maslyuchenko V., Myronyk O. *KC-functions with values in the Ceder plane*. In: Proc. of Sci. Conf. "Modern problems of probability and mathematical analysis", Ivano-Frankivsk, Ukraine, 24 February – 2 March, 2014, Precarpathian Univ., Ivano-Frankivsk, 2014, 73–76. (in Ukrainian)

[10] Maslyuchenko V.K., Myronyk O.D. *The Ceder product and stratifiable spaces*. Bukovinian Math. J. 2013, **1** (1-2), 107–112. (in Ukrainian)

[11] Moran W. *Separate continuity and supports of measures*. J. London Math. Soc. 1969, **44**, 320–324. doi: 10.1112/jlms/s1-44.1.320

[12] Myronyk O.D. *About separately continuous mappings with values in the Ceder plane*. Bukovinian Math. J. 2013, **1** (3-4), 100–105. (in Ukrainian)

[13] Neubrunn T. *Quasi-continuity*. Real Anal. Exchange 1988-1989, **14** (3), 259–306.

Надійшло 10.04.2014

Maslyuchenko V.K., Myronyk O.D. *On continuity of KC-functions with values in Ceder plane*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 329–336.

We show that the Ceder plane $\mathbb{M}$ is a σ-metrizable space, which does not have a development. For every quasicontinuous mapping $f : X \to \mathbb{M}$ the continuity point set $C(f)$ is residual. We investigate the continuity point set $C(f)$ of a mapping $f : X \times Y \to \mathbb{M}$, which is quasicontinuous with respect to the first variable and continuous with respect to the second one.

Key words and phrases: continuity, quasicontinuity, KC-function.

Маслюченко В.К., Мироник О.Д. *О непрерывности KC-функций со значениями в плоскости Сидра* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 329–336.

Показано, что плоскость Сидра $\mathbb{M}$ — это σ-метризуемое пространство, у которого нет измельчения. У каждой квазинепрерывной функции $f : X \to \mathbb{M}$ множество $C(f)$ точек непрерывности будет остаточным в X. Исследовано множество $C(f)$ для функций $f : X \times Y \to \mathbb{M}$, квазинепрерывных по первой переменной и непрерывных по второй.

Ключевые слова и фразы: непрерывность, квазинепрерывность, KC-функция.

ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, 6 (2), 337–341
doi:10.15330/cmp.6.2.337-341

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.337–341

Protasov I.V., Protasova K.D.

AROUND P-SMALL SUBSETS OF GROUPS

A subset X of a group G is called P-small (almost P-small) if there exists an injective sequence $(g_n)_{n\in\omega}$ in G such that the subsets $(g_nX)_{n\in\omega}$ are pairwise disjoint ($g_nX \cap g_mX$ is finite for all distinct n, m), and weakly P-small if, for every $n \in \omega$, there exist $g_0, \dots, g_n \in G$ such that the subsets $g_0X, \dots, g_nX$ are pairwise disjoint. We generalize these notions and say that X is near P-small if, for every $n \in \omega$, there exist $g_0, \dots, g_n \in G$ such that $g_iX \cap g_jX$ is finite for all distinct $i, j \in \{0, \dots, n\}$. We study the relationships between near P-small subsets and known types of subsets of a group, and the behavior of near P-small subsets under the action of the combinatorial derivation and its inverse mapping.

Key words and phrases: P-small, almost P-small, weakly P-small, near P-small subsets of a group; the combinatorial derivation.

Taras Shevchenko National University, 64/13 Volodymyrska str., 01601, Kyiv, Ukraine
E-mail: i.v.protasov@gmail.com (Protasov I.V.)

Introduction

Let G be a group with the identity e, $[G]^{<\omega}$ denotes the family of all finite subsets of G. A subset X of G is called

- *large* if $G = FX$ for some $F \in [G]^{<\omega}$;
- *small* if $L \setminus X$ is large for each large subset L of G;
- *P-small* if there exists an injective sequence $(g_n)_{n\in\omega}$ in G such that the subsets $(g_nX)_{n\in\omega}$ are pairwise disjoint;
- *weakly P-small* if, for every $n \in \omega$, there exist $g_0, \dots, g_n \in G$ such that the subsets $g_0X, \dots, g_nX$ are pairwise disjoint;
- *almost P-small* if there exists an injective sequence $(g_n)_{n\in\omega}$ in G such that $g_nX, \dots, g_mX$ is finite for all distinct m, n;
- *near P-small* if, for every $n \in \omega$, there exist $g_0, \dots, g_n \in G$ such that $g_iX \cap g_jX$ is finite for all distinct $i, j \in \{0, \dots, n\}$;
- *thin* if $gA \cap A$ is finite for for every $g \in G\setminus\{e\}$;
- *sparse* if, for every infinite subset Y of G, there exists a non-empty finite subset $F \subset Y$ such that $\bigcap_{g\in F} gX$ is finite.

УДК 519.51
2010 *Mathematics Subject Classification:* 20D30, 20F05.

The terms large and small subsets appeared in [2], P-small subsets were introduced unexplicitly by Prodanov [7] and explicitly in [3, § 2.1]. Every infinite group G can be generated by some small and P-small subset [4] and contains weakly P-small not P-small subset [1]. Each almost P-small subset of a group can be partitioned into two P-small subsets [6]. For thin and sparse subsets see [6]. We recall that a subset X of an amenable group G is *absolute zero* if $\mu(X) = 0$ for each left invariant Banach measure μ on G. It is easy to see that each near P-small subset of an amenable group G is absolute zero. By [6, Corollary 5.1], each absolute zero is small. Hence, each near P-small subset of an amenable group is small. By [6, Theorem 5.3], each countable amenable groups contains a small subset which is not absolute zero. On the other hand, we take a free group F_A in the alphabet A, $|\ A\ | > 1$, choose $a \in A$ and consider a subset X of all group words in A starting with a or a^{-1}. Then X is P-small but X is large, so X is not small.

In this note we introduce near P-small subsets generalizing weakly and almost P-small subsets. All results are exposed in section 2. We study the relationships between modified P-small sets and thin subsets (Theorems 1 and 2), and the behavior of near P-small subsets under the action of the combinatorial derivation and its inverse mapping (Theorems 3 and 4). The combinatorial derivation, the main tool in this note, was introduced in [9] and studied in [5], [10], [11]. Some necessary auxiliary statements on the combinatorial derivation are arranged in section 1. In section 2 we also show that a near P-small subset needs not to be neither weakly nor almost P-small (Theorem 5) and partition every infinite group G into $\aleph_0$ P-small subsets (Theorem 6). For partition of a group into $\aleph_0$ small subsets see [8].

1 The combinatorial derivation

For a group G, $\mathcal{P}_G$ denotes the family of all subsets of G. A mapping $\Delta : \mathcal{P}_G \to \mathcal{P}_G$ defined by $\Delta(A) = \{g \in G : gA \cap A \ \textit{is infinite}\}$ is called the *combinatorial derivation*. Clearly, $\Delta(A) = \varnothing$ if A is finite and $e \in \Delta(A)$, $(\Delta(A))^{-1} = \Delta(A)$ for each infinite subset A of G. An infinite subset A is thin if and only if $\Delta(A) = \{e\}$. We denote $Sym_G = \{X \subseteq G : X = X^{-1},\ \ e \in X\}$ and use the following auxiliary statement [10, Lemma 2.6].

Lemma 1. *For every subset $A \in Sym_G$ there exist two thin subsets X, Y such that*

$$\Delta(X \cup Y) = A.$$

Lemma 2. *For every countable group G and every non-empty subset $A \in Sym_G$, there exists a subset X of G such that $\Delta(X) = A$ and $G = XX^{-1}$.*

Proof. We enumerate $G = \{g_n : n \in \omega\}$, put $F_n = \{g_0, \dots, g_n\}$ and write the elements of A in a sequence $(a_n)_{n\in\omega}$ (if A is finite, all but finitely many a_n are equal to e). Then we choose inductively a sequence $(X_n)_{n\in\omega}$ of finite subsets of G of the form

$$X_n = \{y_n, g_n, x_{n0}, a_0x_{n0}, x_{n1}, a_1x_{n1}, \dots, x_{nn}, a_nx_{nn}\}$$

such that, for each $n \in \omega$,

(a) $F_{n+1}X_{n+1} \bigcap F_{n+1}(X_0 \bigcup \dots \bigcup X_n) = \varnothing$;

(b) $F_n\{y_n, g_ny_n\} \bigcap F_n\{(x_{ni}, a_ix_{ni}\} = \varnothing, i \in \{0, \dots, n\}$;

(c) $F_n\{x_{ni}, a_ix_{ni}\} \bigcap F_n\{(x_{nj}, a_jx_{nj}\} = \varnothing$, for all distinct $i, j \in \{0, \dots, n\}$.

After ω steps, we denote $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$. By the choice of $(X_n)_{n\in\omega}$, we have $G = XX^{-1}$ and $A \subseteq \Delta(X)$. The conditions (a), (b), (c) guarantee $\Delta(X) \subseteq A$. □

2 Results

Theorem 1. *For every infinite group G, the following statements hold*

(i) every thin subset of G is almost P-small;

(ii) there exists a thin but not weakly P-small subset of G.

Proof. The statement (i) follows directly from corresponding definitions. To prove (ii), we consider two cases: $|\ G\ | = \aleph_0$ and $|\ G\ | > \aleph_0$. If G is countable, we enumerate $G = \{g_n : n \in \omega\}$, put $F_n = \{g_{0n}, \dots, g_n\}$ and choose inductively a sequence $(x_n)_{n\in\omega}$ in G such that, for each $n \in \omega$, $K_{n+1}\{x_{n+1}, g_{n+1}x_{n+1}\} \bigcap K_n\{x_i, g_ix_i : i \le n\} = \varnothing$. Then the subset $X = \{x_n, g_nx_n : n \in \omega\}$ is thin but $gX \bigcap X \ne \varnothing$ for each $g \in G$ so X is not weakly P-small. If $|\ G\ | > \aleph_0$, we denote $\kappa = |\ G\ |$, enumerate $G \backslash \{e\} = \{g_\alpha : \alpha \in \kappa\}$, put $X_0 = \{e\}$, choose $x_0 \in G$ such that $x_0, g_0x_0 \notin X_0$ and construct inductively a κ-sequence $\{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ in G and a κ-sequence $\{X_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ of subgroups of G such that, for each $\alpha \in \kappa$,

(a) $x_\alpha, g_\alpha x_\alpha \notin X_\alpha$;

(b) $X_{\alpha+1}$ is a subgroup generating by X_α and $\{g_\alpha, x_\alpha\}$;

(c) $X_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta$ for each limit ordinal $\alpha \in \kappa$.

After κ steps, we denote $X = \{x_\alpha, g_\alpha x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$. By (b), $gX \bigcap X \ne \varnothing$ for each $g \in G$, so G is not weakly P-small. To verify that X is thin, we take an arbitrary $g \in G \setminus \{e\}$ and use (b), (c) to choose $\gamma \in \kappa$ such that $g \in X_{\gamma+1} \backslash X_\gamma$. Since $g(X \cap X_\gamma) \subseteq X_{\gamma+1} \backslash X_\gamma$, by (a) and (b), we have $|g(X \cap X_\gamma) \bigcap X| \le 2$. If $y \in g(X \backslash X_{\gamma+1}) \bigcap X$ then $y \in \{x_\lambda, gx_\lambda, x_\mu, g^{-1}x_\mu\}$ for some $\lambda, \mu \ge \gamma + 1$. Thus, $|\ g(X \setminus X_\gamma) \cap X\ | \le 4$. By (a) and (b), $|\ X \cap (X_{\gamma+1} \setminus X_\gamma)\ | = 2$. Hence, $|\ gX \cap X\ | \le 8$ and X is thin. □

Theorem 2. *For every infinite group G, there exist two thin subsets X, Y of G such that X, Y is not near P-small.*

Proof. We use Lemma 1 to find thin subsets X, Y of G such that $\triangle(X \cup Y) = G$, so $X \cup Y$ is not near P-small. □

By [6, Lemma 2] , the family of all sparse subsets of G is closed under finite unions. Since each thin subset is sparse, Theorem 2 gives a sparse but not near P-small subset $X \cup Y$ of G.

Theorem 3. *There exists a P-small subset X of the group $G = \mathbb{Q}^2$ such that $\Delta(X)$ is not near P-small.*

Proof. We use the Cartesian coordinates in G, put $X = \{(x, y) \in G :|\ x\ | \le y \le |\ x\ | + 1\}$ and note that $(0, 2z) + X \cap (0, 2z') + X = \varnothing$ for all distinct $z, z' \in \mathbb{Z}$. Hence, X is P-small.

We observe that $\Delta(X)$ contains the subset $Y = \{(x, y) \in G : -\ |\ x\ | \le y \le |\ x\ |\}$ and $\Delta(Y) = G$, so $\Delta(X)$ is not near P-small. □

We recall [10] that a family $\mathcal{F}$ of subsets of a group G is Δ-*complete* (∇-*complete*) if $\Delta(X) \in \mathcal{F}$ for each $X \in \mathcal{F}$ ($\Delta(X) \in \mathcal{F}$ implies $X \in \mathcal{F}$). By Theorem 3, the family of all near P-small subsets of a group G need not to be Δ-complete.

Theorem 4. *For every infinite amenable group G, the family of all near P-small subsets of G is ∇-complete.*

Proof. We assume the contrary and choose a subset X of G such that $\Delta(X)$ is near P-small but X is not near P-small. Then there exists the minimal natural number n such that, for any $F \subset G$, $|F| = n$, there exist distinct $x, y \in F$ such that $xX \bigcap yX$ is infinite. By the minimality of n, there is $H \subset G$, $|H| = n-1$ such that $xX \bigcap yX$ is finite for all distinct $x, y \in H$. Given any $g \in G \setminus H$, there is $h_g \in H$ such that $gX \bigcap h_gX$ is infinite. If follows that $h_g^{-1}g \in \Delta(X)$, $G \setminus H \subseteq H\Delta(X)$ and $\Delta(X)$ is large. Hence, $\Delta(X)$ is not absolute zero and $\Delta(X)$ could not be near P-small. □

We do not know whether Theorem 4 holds for non-amenable groups.

Theorem 5. *For every countable Abelian group G, there exists a near P-small subset X which is neither weakly nor almost P-small.*

Proof. Suppose we have a sequence $(S_n)_{n\in\omega}$ of finite subsets from Sym_G such that $|S_n| > n$ and

(a) $S_k \bigcap S_iS_j = \{e\}$ for any $i, j, k \in \omega$, $k \notin \{i, j\}$.

We apply Lemma 2 to find a subset X of G such that $\Delta(X) = G \setminus \bigcup_{n\in\omega} S_n$ and $G = XX^{-1}$. We note that, for any distinct $g_1, g_2 \in G$

(b) if $g_1^{-1}g_2 \in S_n$ then $g_1X \bigcap g_2X$ is finite;

(c) if $g_1^{-1}g_2 \notin \bigcup_{n\in\omega} S_n$ then $g_1X \bigcap g_2X$ is infinite.

The condition $G = XX^{-1}$ implies that X is not weakly P-small. Since $|S_n| > n$, by (b), X is near P-small. We assume that X is almost P-small and choose an injective sequence $(x_n)_{n\in\omega}$ in G such that $x_iX \bigcap x_jX$ is finite for all distinct $i, j \in \omega$. Since $x_0X \bigcap x_1X$ is finite, by (c), there exists $i \in \omega$ such that $x_0^{-1}x_1 \in S_i$. Analogously, for $n > 1$, there exist $k, j \in \omega$ such that $x_0^{-1}x_n \in S_k$, $x_1^{-1}x_n \in S_j$. We note that $x_0^{-1}x_1 = (x_0^{-1}x_n)(x_n^{-1}x_1)$, $x_1^{-1}x_n = (x_1^{-1}x_0)(x_0^{-1}x_n)$, $x_0^{-1}x_n = (x_0^{-1}x_1)(x_1^{-1}x_n)$. Thus, we have got

$$x_0^{-1}x_1 \in S_i \bigcap S_kS_j, \quad x_1^{-1}x_n \in S_j \bigcap S_iS_k, \quad x_0^{-1}x_n \in S_k \bigcap S_iS_j,$$

and, in view of (a), $i = j = k$. Hence, $(x_0^{-1}x_n) \in S_i$ for any $n > 2$ that is impossible because S_i is finite, so X is not almost P-small. To conclude the proof, it remains to find $(S_n)_{n\in\omega}$ satisfying (a). Since each infinite Abelian group contains either infinite cyclic subgroup, or the Prüffer p-subgroup, or the direct product of $\aleph_0$ finite groups, the late is a routine exercise. □

It should be mentioned that initially above construction appeared to find a weakly P-small but not almost P-small subsets of G.

Theorem 6. *Every infinite group G can be partitioned into $\aleph_0$ P-small subsets.*

Proof. We take an arbitrary countable subgroup H of G, decompose G into right cosets by H and choose some set R of representatives of cosets, so $G = HR$. Then $\{hR : h \in H\}$ is a desired partition of G. □

REFERENCES

[1] Banakh T., Lyaskovska N. *Weakly P-small not P-small subsets in groups*. Internat. J. Algebra Comput. 2008, **18** (1), 1–6. doi:10.1142/S0218196708004263

[2] Bella A., Malykhin V. *Certain subsets of a group*. Questions Answers Gen. Topology 1999, **17**, 183–187.

[3] Dikranjan D., Marconi U., Moresco R. *Groups with a small set of generators*. Appl. Gen. Topol. 2003, **4** (2), 327–350. doi:10.4995/agt.2003.2037

[4] Dikranjan D., Protasov I. *Every infinite group can be generated by P-small subset*. Appl. Gen. Topol. 2006, **7** (2), 265–268. doi:10.4995/agt.2006.1929

[5] Erde J. *A note on combinatorial derivation*. Preprint http://arxiv.org/abs/1210.7622

[6] Lutsenko Ie., Protasov I.V. *Sparse, thin and other subsets of groups*. Internat. J. Algebra Comput. 2009, **19** (4), 491–510. doi:10.1142/S0218196709005135

[7] Prodanov I. *Some minimal group topologies are precompact*. Math. Ann. 1997, **227** (2), 117–125. doi: 10.1007/BF01350188

[8] Protasov I.V. *Small systems of generators of groups*. Math. Notes 2004, **76** (3–4), 389–394. doi: 10.1023/B:MATN.0000043466.45064.97

[9] Protasov I.V. *The combinatorial derivation*. Appl. Gen. Topol. 2013, **14** (2), 171–178. doi:10.4995/agt.2013.1587

[10] Protasov I.V. *The combinatorial derivation and its inverse mapping*. Cent. Eur. J. Math. 2013, **11** (12), 2176–2181. doi:10.2478/s11533-013-0313-x

[11] Protasov I.V., Slobodianiuk S. *On the subset combinatorics of G-spaces*. Algebra Discrete Math. 2014, **17**, 98–109.

Received 18.06.2014

Протасов І.В., Протасова К.Д. *Навколо P-малих підмножин груп* // Карпатські матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 337–341.

Підмножина X групи G називається P-малою (майже P-малою), якщо існує ін'єктивна послідовність $(g_n)_{n\in\omega}$ в G така, що підмножини $(g_nX)_{n\in\omega}$ попарно не перетинаються ($g_nX \cap g_mX$ скінченні для всіх різних n, m), і слабко P-малі, якщо для кожного $n \in \omega$, існують $g_0, \dots, g_n \in G$ такі, що підмножини $g_0X, \dots, g_nX$ попарно не перетинаються. Узагальнено ці поняття: підмножина X називається близько P-малою, якщо для кожного $n \in \omega$ існують $g_0, \dots, g_n \in G$ такі, що $g_iX \cap g_jX$ скінченні для всіх різних $i, j \in \{0, \dots, n\}$. Досліджено співвідношення між близько P-малими підмножинами і відомими типами підмножин груп, досліджено поведінку близько P-малих підмножин під дією комбінаторної похідної та її оберненого відображення.

Ключові слова і фрази: P-малі, майже P-малі, слабко P-малі, близько P-малі підмножини групи; комбінаторна похідна.

Протасов И.В., Протасова К.Д. *Вокруг P-малых подмножеств групп* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 337–341.

Подмножество X группы G называется P-малым (почти P-малым), если существует инъективная последовательность $(g_n)_{n\in\omega}$ в G такая, что подмножества $(g_nX)_{n\in\omega}$ попарно не пересекаются ($g_nX \cap g_mX$ конечны для всех различных n, m), и слабо P-малы, если для каждого $n \in \omega$, существуют $g_0, \dots, g_n \in G$ такие, что подмножества $g_0X, \dots, g_nX$ попарно не пересекаются. Обобщены эти понятия: подмножество X называется близко P-малым, если для каждого $n \in \omega$ существуют $g_0, \dots, g_n \in G$ такие, что $g_iX \cap g_jX$ конечные для всех различных $i, j \in \{0, \dots, n\}$. Изучены соотношения между близко P-малыми подмножествами и известными типами подмножеств групп, изучено поведение близко P-малых подмножеств под действием комбинаторной производной и ее обратного отображения.

Ключевые слова и фразы: P-малая, почти P-малая, слабо P-малая, близко P-малые подмножества группы; комбинаторная производная.

ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, 6 (2), 342–350
doi:10.15330/cmp.6.2.342-350

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.342–350

Пукальський І.Д.

ЗАДАЧА З КОСОЮ ПОХІДНОЮ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМИ УМОВАМИ І ВИРОДЖЕННЯМ

З допомогою принципу максимуму і апріорних оцінок вивчається задача з косою похідною для лінійного параболічного рівняння зі степеневими особливостями в коефіцієнтах за просторовими змінними та імпульсними умовами за часовою змінною. У гельдерових просторах зі степеневою вагою встановлено існування та єдиність розв'язку поставленої задачі.

Ключові слова і фрази: крайова задача, імпульсна умова, виродження, особливості.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 2 Kotsjubynskyi str., 58012, Chernivtsi, Ukraine

Вступ

Математичне моделювання багатьох фізичних та хімічних явищ приводить до задач з виродженнями та особливостями для рівнянь із частинними похідними. Зокрема, у рівнянні Шредінгера, яке описує стан квантомеханічної системи, коефіцієнти визначають потенціальну енергію і мають степеневі особливості при молодших похідних [1]. Дослідження питань існування і якісних властивостей розв'язків крайових задач для рівнянь з виродженням проведені у працях [2–4].

Вивчення систем з розривними траєкторіями пов'язано з розвитком техніки, в якій імпульсні системи керування відіграють значну роль. Багато задач теорії оптимального керування, теорії ядерних реакторів, динамічних систем приводять до періодичних крайових задач для диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією глибоко вивчені у працях А.М. Самойленка і О.М. Перестюка [5,6] та інших авторів.

Питання існування періодичних розв'язків рівняння із частинними похідними гіперболічного типу з імпульсною дією вивчалися у працях [7–9]. Побудові теорії коректності задачі Коші для параболічних систем з імпульсною дією у максимально широких просторах Діні присвячено другий розділ монографії [10].

У цій статті розглядається задача з косою похідною для лінійного параболічного рівняння із степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах рівняння і крайовій умові на деякій множині точок та імпульсними умовами за часовою змінною у визначені моменти часу. Одержано існування та встановлено оцінки похідних розв'язку поставленої задачі у гельдерових просторах зі степеневою вагою.

УДК 517.956
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K35.

1 Постановка задачі і основний результат

Нехай D — обмежена область простору $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D, $\dim D = n$, Ω — деяка обмежена область, $\overline{\Omega} \subset D$, $\dim \Omega \le n-1$. В області $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$ розглянемо задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка при $t \ne t_\lambda$, $\lambda \in \{1,2,\dots,N\}$, $x \in D \setminus \overline{\Omega}$ задовольняє рівняння

$$(Lu)(t,x) = \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(t,x)\partial_{x_i} + A_0(t,x)\right] u(t,x) = f(t,x), \tag{1}$$

умови за змінною t:

$$u(t_0+0,x) = \varphi_0(x), \tag{2}$$

$$u(t_\lambda+0,x) - u(t_\lambda-0,x) = \psi_\lambda u(t_\lambda-0,x) + \varphi_\lambda(t_\lambda,x), \tag{3}$$

і крайову умову

$$\lim_{x\to z\in\partial D} (\mathcal{B}u-g)(t,x) \equiv \lim_{x\to z\in\partial D} \left[\sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\partial_{x_i}u + b_0(t,x)u - g(t,x)\right] = 0, \tag{4}$$

де $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N < t_{N+1}$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1)–(4). Нехай $Q^{(k)} = [t_k, t_{k+1}) \times D$, $k \in \{0,1,\dots,N\}$, β_i, γ, q, l — дійсні числа, $\beta = \{\beta_1,\dots,\beta_n\}$, $\beta_i \in (-\infty,\infty)$, $\gamma \ge 0$, $q \ge 0$, $l \ge 0$, $P(t,x)$, $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $H_i(t^{(1)},x^{(2)})$, $R_i(t^{(2)},x^{(2)})$ — довільні точки із $Q^{(k)}$, $i \in \{1,2,\dots,n\}$, $x^{(1)} = (x_1^{(1)},\dots,x_i^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)},\dots,x_{i-1}^{(1)},x_i^{(2)},x_{i+1}^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$, $\rho = \inf_{z\in\partial D}|x-z|$, $s(\beta_i,x) = \rho^{\beta_i}$ при $\rho \le 1$ і $s(\beta_i,x) = 1$ при $\rho \ge 1$.

Позначимо через $C^l(\gamma;\beta;q;Q)$ — множину функцій u, які мають неперервні частинні похідні при $t \ne t_\lambda$, $x \notin \overline{\Omega}$, вигляду $\partial_t^i\partial_x^r u$, $2i+|r| \le [l]$, для яких скінченна норма

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_0 = \sup_k\{\sup_{Q^{(k)}}|u|\} \equiv \|u;Q\|_0,$$

$$\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_l = \sup_k \Big\{ \sum_{2i+|r|\le[l]} \|u;\gamma;\beta;q_j;Q^{(k)}\|_{2i+|r|} + \langle u;\gamma;\beta;q;Q^{(k)}\rangle_l \Big\}$$

$$\equiv \sup_k \Big\{ \sum_{2i+|r|\le[l]} \sup_{P\in Q^{(k)}} s(q+(2i+|r|)\gamma,x)|\partial_t^i\partial_k^r u(P)| \prod_{j=1}^{n} s(-r_j\beta_j,x)$$

$$+ \sum_{2i+|r|=[l]} \Big[\sup_{(P_1,H_\nu)\subset Q^{(k)}} \Big[s(q+l\gamma,\tilde{x}) \prod_{j=1}^{n} s(-r_j\beta_j,\tilde{x}) |\partial_t^i\partial_x^r u(P_1) - \partial_t^i\partial_x^r u(H_\nu)|$$

$$\times |x_\nu^{(1)} - x_\nu^{(2)}|^{-\{l\}} s(-\{l\}\beta_\nu,\tilde{x}) \Big]$$

$$+ \sup_{(R_\nu,H_\nu)\subset Q^{(k)}} \Big[s(q+l\gamma,\tilde{x}) \prod_{j=1}^{n} s(-r_j\beta_j,\tilde{x}) |t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\{\frac{l}{2}\}} |\partial_t^i\partial_x^r u(R_\nu) - \partial_t^i\partial_x^r u(H_\nu)| \Big]\Big] \Big\},$$

де $|r| = r_1 + \dots + r_n$, $l = [l] + \{l\}$, $s(q,\tilde{x}) = \min\{s(q,x^{(1)}), s(q,x^{(2)})$.

Щодо задачі (1)–(4) вважаємо виконаними умови:

а) для довільного вектора $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ виконується нерівність

$$\pi_1|\xi|^2 \le \sum_{ij=1}^{n} A_{ij}(t,x)s(\beta_i+\beta_j,x)\xi_i\xi_j \le \pi_2|\xi|^2,$$

π_1, π_2 — фіксовані додатні сталі, $s(\beta_i+\beta_j;x)A_{ij}\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $s(\mu_i,x)\ A_i\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $s(\mu_0,x)A_0\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $\inf\limits_{\overline{Q}} A_0(t,x)\equiv a_0>0$, $\alpha\in(0,1)$, $\mu_i\ge 0$, $\mu_0\ge 0$; $f\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;\mu_0;Q)$, $\varphi_0\in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$;

б) вектори $\overrightarrow{b}^{(s)}=\{b_1^{(s)},\dots,b_n^{(s)}\}$, $b_j^{(s)}=s(\beta_j,x)b_j$ і $\overrightarrow{e}=\{e_1,\dots,e_n\}$, $e_j=b_j\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2\Big)^{-1/2}$, утворюють з напрямком зовнішньої нормалі $\overrightarrow{n}$ до ∂D в точці $P(t,x)\in\Gamma$ кут менший за $\frac{\pi}{2}$, $\Gamma=[t_0,t_{N+1})\times\partial D$, $\partial D\in C^{2+\alpha}$, $s(\beta_j,x)b_j\in C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $s(\delta,x)b_0\in C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $b_0(t,x)|_{\Gamma}\ge 0$, $\delta\ge 0$, $g\in C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;\delta;Q^{(k)})$, $\lim\limits_{x\to z\in\partial D}(\mathcal{B}\varphi_0-g)(t_0,x)=0$, $[g(t_\lambda+0,x)-g(t_\lambda-0,x)]_{\partial D}=[\psi_\lambda g(t_\lambda-0,x)+\mathcal{B}\varphi_\lambda(t_\lambda,x)]_{\partial D}$, $\varphi_\lambda\in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_\lambda))$, $\gamma=\max\Big\{\max\limits_i(1+\beta_i),\max\limits_i(\mu_i-\beta_i),\frac{\mu_0}{2},\delta\Big\}$.

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі (1)–(4) виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1)–(4) із простору $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;Q)$ і справджується нерівність*

$$
\begin{aligned}
\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}\le c\Big\{&\sum_{k=1}^{N}\prod_{\lambda=k}^{N}(1+|\psi_\lambda|)(\|\varphi_{k-1};\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_{k-1})\|_{2+\alpha}\\
&+\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k-1)}\|_{\alpha}+\|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k-1)}\|_{1+\alpha})\\
&+\|\varphi_N;\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_N)\|_{2+\alpha}\\
&+\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(N)}\|_{\alpha}+\|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(N)}\|_{1+\alpha}\Big\}.
\end{aligned}\tag{5}
$$

Для дослідження задачі (1)–(4) встановимо спочатку коректну розв'язність множини крайових задач з гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв'язків виділимо збіжну підпослідовність, граничне значення якої буде розв'язком задачі (1)–(4).

2 Оцінка розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами

Нехай $Q_m^{(k)}=Q^{(k)}\cap\Big\{(t,x)\in Q^{(k)}\,\rho(x)\ge\frac{1}{m}\Big\}$, $m>1$ — послідовності областей, які при $m\to\infty$ збігаються до $Q^{(k)}$.

Розглянемо в області Q задачу знаходження функцій $u_m(t,x)$, які задовольняють при $t\ne t_\lambda$ рівняння

$$(L_1u_m)(t,x)\equiv\Big[\partial_t-\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i(t,x)\partial_{x_i}+a_0(t,x)\Big]u_m=f_m(t,x),\tag{6}$$

умови за змінною t:

$$u_m(t_0+0,x)=\varphi_m^{(0)}(x),\tag{7}$$

$$u_m(t_\lambda+0,x)-u_m(t_\lambda-0,x)=\psi_\lambda u_m(t_\lambda-0,x)+\varphi_m^{(\lambda)}(t_\lambda,x),\tag{8}$$

і крайову умову

$$(\mathcal{B}_1u_m-g_m)(t,x)|_{\Gamma}\equiv\Big[\sum_{i=1}^{n}h_i(t,x)\partial_{x_i}u_m+h_0(t,x)u_m-g_m(t,x)\Big]\Big|_{\Gamma}=0.\tag{9}$$

Коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, функції f_m, $\varphi_m^{(0)}$, $\varphi_m^{(\lambda)}$, g_m в області $Q_m^{(k)}$ співпадають з A_{ij}, A_i, A_0, f, φ_0, φ_λ, g відповідно, а в областях $Q\setminus Q_m^{(k)}$ є неперервним продовженням коефіцієнтів A_{ij}, A_i, A_0, функцій f, φ_0, φ_λ, g із областей $Q_m^{(k)}$ в область $Q\setminus Q_m^{(k)}$ із збереженням гладкості і норми [12, стор. 82].

Для розв'язків задачі (6)–(9) справедлива теорема.

Теорема 2. *Нехай $u_m(t,x)$ — класичний розв'язок задачі (6)–(9) в області Q і виконані умови а), б). Тоді для $u_m(t,x)$ правильна оцінка*

$$
\begin{aligned}
|u_m(t,x)|\le\sum_{k=1}^{N}\Big\{&\prod_{\lambda=k}^{N}(1+|\psi_\lambda|)(\|\varphi_m^{(k-1)};Q\cap(t=t_{k-1})\|_0+\|f_ma_0^{-1};Q^{(k-1)}\|_0\\
&+\|g_mh_0^{-1};Q^{(k-1)}\|_0)\Big\}+\|\varphi_N;Q\cap(t=t_N)\|_0+\|g_mh_0^{-1};Q^{(N)}\|_0+\|f_ma_0^{-1};Q^{(N)}\|_0.
\end{aligned}\tag{10}
$$

Доведення. Нехай $\max\limits_{\overline{Q}^{(k)}}u_m(t,x)=u_m(R_1)$. Якщо $R_1\in Q^{(k)}$, то в точці R_1 виконуються співвідношення

$$\partial_tu_m(R_1)\ge 0,\partial_{x_i}u_m(R_1)=0,\qquad\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}(R_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m(R_1)\le 0\tag{11}$$

і задовольняється рівняння (6). З урахуванням (11) і рівняння (6) в точці R_1 правильна нерівність

$$u_m(R_1)\le\sup_{Q^{(k)}}(f,a_0^{-1}).\tag{12}$$

Нехай $\min\limits_{Q^{(k)}}u_m(t,x)=u_m(R_2)$. Якщо $R_2\in Q^{(k)}$, то в точці R_2 виконується співвідношення

$$\partial_tu_m(R_2)\le 0,\partial_{x_i}u_m(R_2)=0,\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}(R_2)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m(R_2)\ge 0\tag{13}$$

і задовольняється рівняння (6). З урахуванням (13) і рівняння (6) в точці R_2 маємо

$$u_m(R_2)\ge\inf_{Q^{(k)}}(f,a_0^{-1}).\tag{14}$$

Якщо $R_1\in[t_k,t_{k+1})\times\partial D$, то виконується умова (9). Оскільки $\frac{du_m(R_1)}{d\overrightarrow{e}}\ge 0$ (вектор $\overrightarrow{e}$ задовольняє умову б)), то з рівності $(\mathcal{B}_1u_m-g_m)(R_1)=0$ маємо

$$u_m(R_1)\le\sup_{\overline{Q}^{(k)}}(g_mh_0^{-1}).\tag{15}$$

Якщо $R_2\in[t_k,t_{k+1})\times\partial D$, то $\frac{du_m(R_2)}{d\overrightarrow{e}}\le 0$. Враховуючи крайову умову (9), маємо

$$u_m(R_2)\ge\inf_{\overline{Q}^{(k)}}(g_mh_0^{-1}).\tag{16}$$

У випадку, коли $R_1\in\overline{D}$, або $R_2\in\overline{D}$ з початкової умови (7), одержимо

$$|u_m|\le\|\varphi_m^{(0)};D\|_0.\tag{17}$$

Враховуючи нерівності (12), (14), (15), (16), (17) при $k=0$, одержимо

$$\|u_m; Q^{(0)}\|_0 \leq \|f_m a_0^{-1}; Q^{(0)}\|_0 + \|g_m h_0^{-1}; Q^{(0)}\|_0 + \|\varphi_m^{(0)}; D\|_0. \tag{18}$$

Якщо $R_1 \in Q \cap (t=t_\lambda)$, або $R_2 \in Q \cap (t=t_\lambda)$, $\lambda \geq 1$, то враховуючи умову (8), одержимо рекурентні співвідношення

$$\|u_m; Q \cap (t=t_\lambda)\|_0 \leq (1+|\varphi_\lambda|)\|u_m; Q^{(\lambda-1)}\|_0 + \|\varphi_m^{(\lambda)}; Q \cap (t=t_\lambda)\|_0. \tag{19}$$

Об'єднуючи нерівності (12), (14), (15), (18), (19), одержимо нерівність (10). □

Знайдемо оцінки похідних розв'язків $u_m(t,x)$. Введемо у просторі $C^l(Q)$ норму $\|u_m;\gamma;\beta;q;Q\|_l$, еквівалентну при кожному фіксованому m гельдеровій нормі, яка визначається так само, як і $\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_l$, тільки замість функцій $s(\beta_i,x)$ беремо відповідно $d(\beta_i,x)$: $d(\beta_i,x) = \max(s(\beta_i,x), m^{-\beta_i})$, якщо $\beta_i \geq 0$ і $d(\beta_i,x) = \min(s(\beta_i,x), m^{-\beta_i})$, якщо $\beta_i < 0$.

Теорема 3. *Нехай виконані умови теореми 1. Тоді для розв'язку задачі* (6) — (9) *правильна оцінка*

$$\begin{aligned}\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \leq c\Big\{ &\sum_{k=1}^{N}\Big\{\prod_{\lambda=k}^{N}(1+|\psi_\lambda|)(\|\varphi_{k-1};\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_{k-1})\|_{2+\alpha}\\ &+\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k-1)}\|_\alpha + \|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k-1)}\|_{1+\alpha})\Big\}\\ &+\|\varphi_N;\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_N)\|_{2+\alpha}\\ &+\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(N)}\|_\alpha + \|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(N)}\|_{1+\alpha}\Big\}.\end{aligned} \tag{20}$$

Доведення. Для знаходження оцінки (20) в області $Q^{(k)}$ розглянемо задачу

$$(L_1 u_m)(t,x) = f_m(t,x), (\mathcal{B}_1 u_m - g_m)(t,x)|_{\Gamma^{(k)}} = 0, u_m(t_k+0,x) = G_m^{(k)}(t_k,x), \tag{21}$$

де $\Gamma^{(k)} = [t_k, t_{k+1}) \times \partial D$, $G_m^{(0)}(t_0,x) = \varphi_m^{(0)}(x)$, $x \in D$, $G_m^{(\lambda)}(t_\lambda,x) = (1+\psi_\lambda)[u_m(t_\lambda-0,x) + \varphi_m^{(\lambda)}(t_\lambda,x)]$, $x \in Q\cap(t=t_\lambda)$, $\lambda \in \{1,\ldots,N\}$.

В областях $Q^{(k)}$ розв'язок крайової задачі (21) існує і єдиний в просторі $C^{2+\alpha}(Q^{(k)})$ ([4, стор. 364]). Знайдемо його оцінку. Використовуючи означення норми та інтерполяційні нерівності із [11], маємо

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_{2+\alpha} \leq (1+\varepsilon^\alpha)\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\rangle_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|u_m;Q^{(k)}\|_0,$$

де ε — довільне дійсне число із $(0,1)$. Тому досить оцінити півнорму $\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\rangle_{2+\alpha}$. Із визначення півнорми випливає існування в $Q^{(k)}$ точок P_1, H_ν, R_ν, для яких правильна одна з нерівностей

$$\frac{1}{2}\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_{2+\alpha} \leq E_\mu, \quad \mu \in \{1,2\}, \tag{22}$$

де

$$E_1 = \sum_{2i+|r|=2} |x_\nu^{(1)} - x_\nu^{(2)}|^{-\alpha} d((2+\alpha)\gamma,\bar{x}) d(-\alpha\beta_\nu,\bar{x}) \prod_{j=1}^{n} d(-r_j\beta_j,\bar{x}) |\partial_t^i\partial_x^r u_m(H_\nu) - \partial_t^i\partial_x^r u_m(P_1)|,$$

$$E_2 = \sum_{2i+|r|=2} |t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2}} d((2+\alpha)\gamma,\bar{x}) \prod_{j=1}^{n} d(-r_j\beta_j,\bar{x}) |\partial_t^i\partial_x^r u_m(H_\nu) - \partial_t^i\partial_x^r u_m(R_\nu)|,$$

$d(\gamma,\bar{x}) = \min(d(\gamma,x^{(1)}), d(\gamma,x^{(2)}))$.

Якщо $|x_\nu^{(1)} - x_\nu^{(2)}| \geq n^{-1} d(\gamma - \beta_\nu, \bar{x})\frac{\varepsilon_1}{4} \equiv T_1$, ε_1 — довільне дійсне число із $(0,1)$, то

$$E_1 \leq 2\varepsilon_1^{-\alpha}\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_2\,. \tag{23}$$

Якщо $|t^{(1)} - t^{(2)}| \geq d(2\gamma,\bar{x})\frac{\varepsilon_1^2}{16} \equiv T_2$, то

$$E_2 \leq 2\varepsilon_1^{-\alpha}\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_2\,. \tag{24}$$

Застосовуючи інтерполяційні нерівності до (23), (24), знаходимо

$$E_\mu \leq \varepsilon^\alpha\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|u_m;Q^{(k)}\|_0\,. \tag{25}$$

Нехай $|x_\nu^{(1)} - x_\nu^{(1)}| \leq T_1$, $|t^{(1)} - t^{(2)}| \leq T_2$. Будемо вважати $|x_\nu^{(1)} - y_\nu| \geq 4T_1$, $y \in \partial D$ і $d(\gamma,\bar{x}) \equiv d(\gamma,x^{(1)})$, $P_1(t^{(1)},x^{(1)}) \in Q^{(k)}$, $k \in \{0,1,\ldots,N\}$. В області $Q^{(k)}$ запишемо задачу (21) у вигляді

$$\begin{aligned}\Big[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\Big]u_m &= \sum_{ij=1}^{n}[a_{ij}(P) - a_{ij}(P_1)]\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m\\ &- \sum_{i=1}^{n} a_i(P)\partial_{x_i}u_m - a_0(P)u_m + f_m(t,x) \equiv F(t,x;u_m),\end{aligned} \tag{26}$$

$$u_m(t_k+0,x) = G_m^{(k)}(t_k,x), \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} h_i(P_1)\partial_{x_i}u_m|_{\Gamma^{(k)}} &= \Big\{\sum_{i=1}[h_i(P_1) - h_i(P)]\partial_{x_i}u_m - h_0(P)u_m + g_m(P)\Big\}\Big|_{\Gamma^{(k)}}\\ &\equiv \Phi_m(t,x;u_m)|_{\Gamma^{(k)}}.\end{aligned} \tag{28}$$

Нехай V_τ — область із $Q^{(k)}$, $V_\tau = \{(t,x) \in Q^{(k)}, |x_j - x_j^{(1)}| \leq \tau T_1$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, $|t - t^{(1)}| \leq \tau^2 T_2\}$. В задачі (26), (28) зробимо заміну $u_m(t,x) = v_m(t,y)$, $y_j = d(\beta_j,x^{(1)})x_j$, одержимо

$$(L_2 v_m)(t,y) \equiv \Big[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1)d(\beta_i+\beta_j,x^{(1)})\partial_{y_i}\partial_{y_j}\Big]v_m = F(t,Y;v_m), \tag{29}$$

$$v_m(t_k+0,Y) = G_m^{(k)}(t_k,Y), \tag{30}$$

$$(\mathcal{B}_2 v_m)(t,y)|_{\Gamma^{(k)}} \equiv \Big[\sum_{i=1}^{n} h_i(P_1)d(\beta_i,x^{(1)})\partial_{y_i}v_m\Big]\Big|_{\Gamma^{(k)}} = \Phi_m(t,Y;v_m)|_{\Gamma^{(k)}}, \tag{31}$$

де $Y = (d(-\beta_1,x^{(1)})x_1,\ldots,d(-\beta_n,x^{(1)})x_n)$.

Позначимо через $y_j^{(1)} = d(\beta_j,x^{(1)})x_j^{(1)}$, $V_\tau^{(1)} = \{(t,y), |t-t^{(1)}| \leq \tau^2 T_2, |y_j - y_j^{(1)}| \leq \tau\sqrt{T_2}\}$ і візьмемо тричі диференційовну функцію $\eta(t,y)$, яка задовольняє умови

$$\eta(t,y) = \begin{cases} 1, & (t,y) \in V_{1/2}^{(1)}, 0 \leq \eta(t,y) \leq 1;\\ 0, & (t,y) \notin V_{3/4}^{(1)}, |\partial_t^i\partial_y^r\eta| \leq c_{ri}d(-(2i+|r|)\gamma,x^{(1)}).\end{cases}$$

Тоді функція $\omega_m(t,y) = v_m(t,y)\eta(t,y)$ задовольняє крайову задачу

$$(L_2\omega_m)(t,y) = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1)d(\beta_i+\beta_j, x^{(1)})\{\partial_{y_i}v_m\partial_{y_j}\eta + \partial_{y_j}v_m\partial_{y_i}\eta + v_m\partial_{y_i}\partial_{y_j}\eta\} + \eta F(t,Y;v_m) \equiv F_1(t,y;v_m), \tag{32}$$

$$\omega_m(t_k+0,y) = G_m^{(k)}(t_k,Y)\eta(t_k,y), \tag{33}$$

$$(\mathcal{B}_2\omega_m)(t,y)|_{\Gamma^{(k)}} = \left\{\eta(t,y)\Phi(t,Y;v_m) - v_m\sum_{i=1}^{n} h_i(P_1)d(\beta_i,x_i^{(1)})\partial_{y_i}\eta\right\}\Big|_{\Gamma^{(k)}} \equiv \Phi_m^{(1)}(t,Y;v_m). \tag{34}$$

На підставі теореми 5.3 із [4, стор. 364] для розв'язку задачі (32)–(34) і довільних точок $(M_1,M_2)\subset V_{1/2}^{(1)}$ справджується нерівність

$$\begin{aligned} d^{-\alpha}(M_1,M_2)|\partial_t^i\partial_x^r v_m(M_1) - \partial_t^i\partial_x^r v_m(M_2)| \\ \le c(\|F_1\|_{C^\alpha(V_{3/4}^{(1)})} + \|G_m^{(k)}(\eta)\|_{C^{2+\alpha}(V_{3/4}^{(1)}\cap(t=t_k))} + \|\Phi_m^{(1)}\|_{C^{1+\alpha}(V_{3/4}^{(1)}\cap\Gamma^{(k)})}), \end{aligned} \tag{35}$$

$2i+|r|=2$, $d(M_1,M_2)$ — параболічна відстань між точками M_1 і M_2.

Враховуючи властивості функції $\eta(t,y)$, знаходимо

$$\|F_1\|_{C^\alpha(V_{3/4}^{(1)})} \le cd(-(2+\alpha)\gamma, x^{(1)})(\|f_m;\gamma;0;2\gamma;V_{3/4}^{(1)}\|_\alpha + \|v_m;V_{3/4}^{(1)}\|_0 + \|v_m;\gamma;0;0;V_{3/4}^{(1)}\|_2),$$

$$\|G_m^{(k)}\eta\|_{C^\alpha(V_{3/4}^{(1)}\cap(t=t_k))} \le cd(-(2+\alpha)\gamma, x^{(1)})(\|G_m^{(k)};\gamma;0;0;V_{3/4}^{(1)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha},$$

$$\begin{aligned} \|\Phi_m^{(1)}\|_{C^{1+\alpha}(V_{3/4}^{(1)}\cap\Gamma^{(k)})} \le cd(-(2+\alpha)\gamma, x^{(1)})(\|g_m;\gamma;0;\gamma;V_{3/4}^{(1)}\|_{1+\alpha} \\ + \|v_m;V_{3/4}^{(1)}\|_0 + \|v_m;\gamma;0;0;V_{3/4}^{(1)}\|_2), \end{aligned} \tag{36}$$

Підставляючи (36) у (35) і повертаючись до змінних (t,x), одержимо нерівність

$$\begin{aligned} E_\mu \le (\varepsilon^\alpha(n+2)+\varepsilon_1 Cn^2)\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_{2+\alpha} + c(\|f_m;\gamma;0;2\gamma;Q^{(k)}\|_\alpha \\ + \|g_m;\gamma;\beta;\gamma;Q^{(k)}\|_{1+\alpha} + \|G_m^{(k)};\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha} + \|u_m;Q^{(k)}\|_0). \end{aligned} \tag{37}$$

Враховуючи значення виразу $G_m^{(k)}(t_k,x)$ при $k=0$, маємо

$$\|G_m^{(0)};\gamma;\beta;0;Q^{(0)}\cap(t=t_0)\|_{2+\alpha} = \|\varphi_m^{(0)};\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha}. \tag{38}$$

Об'єднуючи нерівності (18), (25), (37), (38) і вибираючи ε, ε_1 достатньо малими, одержимо

$$\begin{aligned} \|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(0)}\|_{2+\alpha} \le c(\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(0)}\|_\alpha \\ + \|\varphi_m^{(0)};\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha} + \|g_m;\gamma;\beta;\delta;Q^{(0)}\|_{1+\alpha}). \end{aligned} \tag{39}$$

Якщо $k\ge 1$, то враховуючи значення виразу $G_m^{(k)}(t_k,x)$, одержимо нерівності

$$\begin{aligned} \|G_m^{(k)};\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha} \le (1+|\psi_k|)\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k-1)}\|_{2+\alpha} \\ + \|\varphi_m^{(k)};\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha}. \end{aligned} \tag{40}$$

Об'єднуючи нерівності (19), (22), (25), (37), (38), (40) і вибираючи ε, ε_1 достатньо малими, одержимо нерівності

$$\begin{aligned} \|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_{2+\alpha} \le c(\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}\|_\alpha + \|g_m;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k)}\|_{1+\alpha}) \\ + (1+|\psi_k|)\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k-1)}\|_{2+\alpha} + \|\varphi_m^{(k)};\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha}). \end{aligned} \tag{41}$$

Оскільки

$$\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}\|_\alpha \le c\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}\|_\alpha, \quad \|g_m;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k)}\|_{1+\alpha} \le c\|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k)}\|_{1+\alpha},$$

$$\|\varphi_m^{(k)};\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha} \le c\|\varphi_k;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha},$$

то об'єднавши нерівності (39) і (41), одержимо оцінку (20).

Розглянемо випадок $|x_\nu^{(1)} - y_\nu| \le 4T_1$, $y\in\partial D$, $\nu\in\{1,2,\dots,n\}$. Вважаємо для простоти $\nu=n$. Нехай $K(P)$ — куля радіуса R_0, $R_0\ge 4(T_1 n + T_2)$ з центром в деякій точці $P\in\Gamma^{(k)}$, яка містить точки P_1, H_j, R_j. Використовуючи обмеження на гладкість межі ∂D, можна розпрямити $\partial D\cap K(P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x=\psi(\xi)$ із [12, стор. 126]. В результаті такого перетворення область $Q^{(k)}\cap K(P)$ перейде в область Π, для точок якої $\xi_n\ge 0$.

Вважаємо, що $u_m(t,x)$, P_1, H_j, R_j при цьому перетворенні переходять відповідно в $v_m(t,\xi)$, M_1, Z_j, Θ_j. Позначимо коефіцієнти диференціальних виразів L_1, $\mathcal{B}_1$ в області Π через $\tilde{a}_{ij}(t,\xi)$, $\tilde{a}_i(t,\xi)$, $\tilde{a}_0(t,\xi)$, $\tilde{h}_k(t,\xi)$, $\tilde{h}_0(t,\xi)$. Тоді $v_m(t,\xi)$ буде розв'язком задачі

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{ji=1}^{n}\tilde{a}_{ij}(M_1)\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}\right]v_m = \sum_{ij=1}^{n}[\tilde{a}_{ij}(t,\xi) - \tilde{a}_{ij}(M_1)]\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}v_m - \sum_{i=1}^{n}\tilde{a}_i(t,\xi)\partial_{\xi_i}v_m \\ - \tilde{a}_0(t,\xi)v_m + f_m(t,\pi(\xi)), \end{aligned}$$

$$v_m(t_0+0,\xi) = G_m^{(k)}(t_k,\pi(\xi)),$$

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{h}_i(M_1)\partial_{\xi_i}v_m\Big|_{\xi_n=0} = \left\{\sum_{i=1}^{n}[\tilde{h}_i(M_1) - \tilde{h}_i(t,\xi)]\partial_{\xi_i}v_m - \tilde{h}_0(t,\xi)v_m + g_m(t,\pi(\xi))\right\}\Big|_{\xi_n=0}.$$

Повторюючи міркування, наведені при знаходженні оцінок розв'язку задачі (21), і використовуючи при цьому теорему 6.1 із [4, стор. 364], одержимо нерівність (20). □

Доведення теореми 1. Права частина нерівності (20) не залежить від m. Крім того, послідовності $\{U_m^{(0)}\}\equiv\{u_m\}$, $\{U_m^{(1)}\}\equiv\{d(\gamma-\beta_i,x)\partial_{x_i}u_m(t,x)\}$, $\{U_m^{(2)}\}\equiv\{d(2\gamma;x)\,\partial_t u_m(t,x)\}$, $\{U_m^{(3)}\}\equiv\{d(2\gamma-\beta_i-\beta_j,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m(t,x)\}$ рівномірно обмежені і рівностепенно неперервні в областях $Q^{(k)}$. За теоремою Арчела існують підпослідовності $\{U_{m(j)}^{(\mu)}\}$, рівномірно збіжні в $Q^{(k)}$ до $\{U_0^{(\mu)}\}$ при $m(j)\to\infty$, $\mu\in\{0,1,2,3\}$. Переходячи до границі при $m(j)\to\infty$ в задачі (6)–(9), одержимо, що $u(t,x) = U_0^{(0)}$ — єдиний розв'язок задачі (1)–(4), $u\in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$. □

3 Висновки

Досліджено задачу з косою похідною для лінійного параболічного рівняння зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах на деякій множині точок та імпульсними умовами за часовою змінною.

В гельдерових просторах зі степеневою вагою доведено існування, єдиність та одержані оцінки похідних розв'язку поставленої задачі.

References

[1] Seitz F. Modern solid state theory. Phys. Mat. Lit., Moscow, 1949. (in Russian)

[2] Bazalii B.V., Shelepov V.Yu. *Variational methods in a mixed problem of thermal equilibrium with a free boundary*. In: Leifman L.J. (Ed.) Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. Eleven Papers on Differential Equations, vol. 126, 77–92.

[3] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. In: Ser. Operator Theory: Adv. and Appl., 152. Birkhäuser, Basel, 2004.

[4] Ladygenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva N.N. Linear and quasilinear parabolic equations. Nauka, Moscow, 1967. (in Russian)

[5] Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulse Differential Equations. World Scientific, Singapore, 1995.

[6] Perestyuk N.A., Plotnikov V.A., Samoilenko A.M., Skripnik N.V. Differential Equations with Impulse Effects: Multivalued Right-hand Sides with Discontinuities. Walter de Gruyter Co, Berlin, 2011.

[7] Perestyuk N.A., Tkach A.B. *Periodic solutions of a weakly nonlinear system of partial differential equations with pulse influence*. Ukrainian Math. J. 1997, **49** (4), 665–671. doi:10.1007/BF02487331 (translation of Ukrain. Mat. Zh. 1997, **49** (4), 601–605. (in Ukrainian))

[8] Bainov D.D., Minchev E., Myshkis A. *Periodic boundary value problems for impulsive hyperbolic systems*. Commun. Appl. Anal. 1997, **1** (4), 1–14.

[9] Asanova A.T. *On a nonlocal boundary-value problem for systems of impulsive hyperbolic equations*. Ukrainian Math. J. 2013, **65** (3), 349–365. doi:10.1007/s11253-013-0782-x (translation of Ukrain. Mat. Zh. 2013, **65** (3), 315–328. (in Ukrainian))

[10] Matiychuk M.I. Parabolic and elliptic problems on Dini spaces. Prut, Chernivtsi, 2010. (in Ukrainian)

[11] Pukalsky I. Boundary problems for irregularly parabolic and elliptic equations with degeneration and peculiarities. Prut, Chernivtsi, 2008. (in Ukrainian)

[12] Fridman A. Partial differential equations of parabolic type. Dover Publ., Mineola, New York, 2008.

Надійшло 24.10.2013

Pukalskiy I.D. *The problem with inclined derivative for a parabolic equations with impulse conditions and degeneration*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 342–350.

By application of maximum principle and apriori estimates it is studied the inclined derivative problem for a linear parabolic equation with power singularity in the coefficients with respect to space variables and impulse conditions respect to time variable. It is established the uniqueness and the existence of the solution of the stated problem in Hölder spaces.

Key words and phrases: boundary problem, impulse condition, degeneration, peculiarities.

Пукальский И.Д. *Задача с косой производной для параболических уравнений с импульсными условиями и вырождением* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 342–350.

С помощью принципа максимума и априорных оценок изучается задача с косой производной для линейного параболического уравнения со степенными особенностями в коэффициентах по пространственным переменным и импульсными условиями по временной переменной. В гельдеровых пространствах со степенным весом установлено существование и единственность решения поставленной задачи.

Ключевые слова и фразы: краевая задача, импульсное условие, вырождение, особенности.

ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, 6 (2), 351–359
doi:10.15330/cmp.6.2.351-359

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.351–359

Symotyuk M.M.[1], Tymkiv I.R.[2]

PROBLEM WITH TWO-POINT CONDITIONS FOR PARABOLIC EQUATION OF SECOND ORDER ON TIME

The correctness of the problem with two-point conditions on time variable and Dirichlet-type conditions on spatial coordinates for the linear parabolic equations are established. The metric theorem about estimate from below of small denominators of the problem is proved.

Key words and phrases: parabolic equations, two-point problem, Fourier series, small denominators, Hausdorff measure.

[1] Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 3b Naukova str., 79060, Lviv, Ukraine
[2] Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, 15 Karpatska str., 76019, Ivano-Frankivsk, Ukraine
E-mail: quaternion@ukr.net (Symotyuk M.M.), tymkiv_if@ukr.net (Tymkiv I.R.)

Introduction

The problems with two-point and multipoint conditions with respect to the time variable for partial differential equations were studied in many scientific papers (see, for example [2–5,7–11] and the references there). In particular, the correctnes of multipoint problems for evolution equations in unbounded domain was investigated in the works [4,5]. The solvability of multipoint problems for partial differential equations in bounded domains is frequenly related to the problem of small denominators. In the scientific works [3,7,8,11] metric approach have used for estimate from below of small denominators and it was proved that the conditions of solvability of such problems are satisfied for almost all (with respect to the Lebesgue measure) vectors which coordinates are the coefficients of the equations and interpolation nodes values.

The results of scientific works [3,7,8,11] were generalized in the papers [2,9,10]. The correctness of problems with multipoint conditions holds for almost all (with respect to the Lebesgue measure) vectors which components are the interpolation nodes values (see [9,10]). The conditions of solvability of the problem with two multiple nodes for factorized equation for almost all (with respect to the Lebesgue measure) vectors constructed by the coefficients of the equations (see [2]).

In the present work, we established the conditions of correct solvability of local two-point problem for factorized, parabolic operator (by Petrovskyi sense) in cylindrical domain which is a cartesian product of time segment and special multidimentional parallelepiped and we prove that such conditions are true for almost all (with respect to the Hausdorff measure) vectors constructed by coefficients of the equation.

УДК 517.95+511.42
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35G15, 11K60.
The work is partially supported by the SFFR of Ukraine (project No. 54.1/027).

1 Statement of the Problem

In the domain $Q_T^p = (0,T)\times \Pi^p$, $\Pi^p = (0,\pi)^p$, we consider the problem

$$\prod_{q=1}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{j=1}^{p}a_j^q L_j^b + A_q(L_1,\dots,L_p)\right)u(t,x)=0,\ (t,x)\in Q_T^p, \tag{1}$$

$$u(t_1,x)=\varphi_1(x),\quad u(t_2,x)=\varphi_2(x),\quad 0\le t_1<t_2\le T,\quad x=(x_1,\dots,x_p)\in\Pi^p, \tag{2}$$

$$L_j^m u(t,x)\Big|_{x_j=0} = L_j^m u(t,x)\Big|_{x_j=\pi}=0,\quad m\in\{0,1,\dots,b-1\},\ j\in\{1,\dots,p\}, \tag{3}$$

where $a_j^q>0, j\in\{1,\dots,p\}, q\in\{1,2\}$,

$$A_q(L_1,\dots,L_p)=\sum_{|s|<b}A_s^q L_1^{s_1}\dots L_p^{s_p},\quad A_s^q\in\mathbb{C},\quad q\in\{1,2\},\quad b\in\mathbb{N},$$

$L_j := -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(p_j(x_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)+q_j(x_j)$; $p_j\in C^{2b-1}[0,\pi]$, $q_j\in C^{2b-2}[0,\pi]$ are real-valued functions, $p_j(x_j)\ge p_{0,j}>0, q_j(x_j)\ge 0, j\in\{1,\dots,p\}$.

We denote via $\Lambda_j=\{\lambda_{k_j}, k_j\in\mathbb{N}\}$ and $\{X_{k_j}(x_j), k_j\in\mathbb{N}\}$, $j\in\{1,\dots,p\}$, the set of eigenvalues and the system of responsible eigenfunctions (we suppose that $\int_0^\pi |X_{k_j}(x_j)|^2dx_j=1$) of such problem

$$L_jX(x_j)=\lambda X(x_j),\quad X(0)=X(\pi)=0. \tag{4}$$

It is known [6] that for each j, $j\in\{1,\dots,p\}$, the eigenfunctions of the problem (4) make the total orthonormal system in the space $L_2(0,\pi)$. Under the set of conditions for $p_j(x_j)$ and $q_j(x_j)$ the next estimates

$$C_1k_j^2\le\lambda_{k_j}\le C_2k_j^2, \tag{5}$$

$$\max_{0\le x_j\le\pi}\left|X_{k_j}^{(r)}(x_j)\right|\le N_jk_j^r,\quad r\in\{0,1,\dots,2b\},\quad k_j\in\mathbb{N},\quad j\in\{1,\dots,p\},$$

are true for all $k_j\in\mathbb{N}$, where $C_1, C_2, N_1,\dots,N_p$ are positive constants; in addition to that the system of functions

$$\{X_k(x)=X_{k_1}(x_1)\dots X_{k_p}(x_p), k=(k_1,\dots,k_p)\in\mathbb{N}^p\}$$

is a total orthonormal system in the space $L_2(\Pi^p)$.

Denote $\Lambda=\{\vec\lambda_k=(\lambda_{k_1},\dots,\lambda_{k_p}), k\in\mathbb{N}^p\}$, $|\vec\lambda_k^b|=\lambda_{k_1}^b+\dots+\lambda_{k_p}^b$, $b\in\mathbb{N}$, $\vec\beta=(\beta_1,\dots,\beta_p)\in\mathbb{R}^p$, $(\vec\beta,\vec\lambda_k^b)=\beta_1\lambda_{k_1}^b+\dots+\beta_p\lambda_{k_p}^b$; $E_{\alpha,\vec\beta}^b$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\vec\beta\in\mathbb{R}^p$ is a space of functions $\varphi(x)=\sum\varphi_kX_k(x)$, $\varphi_k\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{N}^p$, with finite norm

$$\left\|\varphi;E_{\alpha,\vec\beta}^b\right\|=\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{N}^p}|\varphi_k|^2w_k^2(\alpha;\vec\beta;b)},\quad w_k(\alpha;\vec\beta;b)=|\vec\lambda_k^b|^\alpha\exp\left(\vec\beta,\vec\lambda_k^b\right);$$

$C^n\left([0,T];E_{\alpha,\vec\beta}^b\right)$ is space of functions $u(t,x)=\sum u_k(t)X_k(x)$, $u_k(t)\in C^n[0,T]$, $k\in\mathbb{N}^p$, with norm

$$\left\|u;C^n\left([0,T];E_{\alpha,\vec\beta}^b\right)\right\|=\sum_{j=0}^{n}\max_{t\in[0,T]}\left\|\partial^ju(t,\cdot)/\partial t^j;E_{\alpha,\vec\beta}^b\right\|<\infty.$$

2 Uniqueness of a Solution of the Problem

The solution of the problem (1)–(3) in the space $C^2\left([0,T];E_{\alpha,\vec\beta}^b\right)$ has the form of series

$$u(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{N}^p}u_k(t)X_k(x). \tag{6}$$

The coefficient $u_k(t), k\in\mathbb{N}^p$, is a solution of the two-point problem for ordinary differential equation

$$\prod_{q=1}^{2}\left(\frac{d}{dt}+\sum_{j=1}^{p}a_j^q\lambda_{k_j}^b+A_q(\lambda_{k_1},\dots,\lambda_{k_p})\right)u_k(t)=0, \tag{7}$$

$$u_k(t_1)=\varphi_{1k},\quad u_k(t_2)=\varphi_{2k}, \tag{8}$$

where $\varphi_{1k}, \varphi_{2k}$, $k\in\mathbb{N}^p$ are the Fourier coefficients (according to the system $X_k(x)$, $k\in\mathbb{N}^p$) of functions $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ respectively. Let $\mathcal{L}$ by a set $\{k\in\mathbb{N}^p:\mu_1(\vec\lambda_k)=\mu_2(\vec\lambda_k)\}$, where

$$\mu_q(\vec\lambda_k)=-\sum_{j=1}^{p}a_j^q\lambda_{k_j}^b-A_q(\lambda_{k_1},\dots,\lambda_{k_p}),\quad q\in\{1,2\},\quad k\in\mathbb{N}^p. \tag{9}$$

The solution of the problem (7), (8) is defined by the formulas

$$u_k(t)=\begin{cases}D_1(\vec\lambda_k)e^{\mu_1(\vec\lambda_k)t}+D_2(\vec\lambda_k)e^{\mu_2(\vec\lambda_k)t}, & \text{if } k\in\mathbb{N}^p\setminus\mathcal{L},\\ D_3(\vec\lambda_k)e^{\mu_1(\vec\lambda_k)t}+D_4(\vec\lambda_k)te^{\mu_1(\vec\lambda_k)t}, & \text{if } k\in\mathcal{L},\end{cases}$$

where $D_j(\vec\lambda_k)$, $j\in\{1,\dots,4\}$, is a solution of the following system of linear equations

$$\begin{cases}D_1(\vec\lambda_k)e^{\mu_1(\vec\lambda_k)t_1}+D_2(\vec\lambda_k)e^{\mu_2(\vec\lambda_k)t_1}=\varphi_{1k},\\ D_1(\vec\lambda_k)e^{\mu_1(\vec\lambda_k)t_2}+D_2(\vec\lambda_k)e^{\mu_2(\vec\lambda_k)t_2}=\varphi_{2k},\end{cases}\ \text{if } k\in\mathbb{N}^p\setminus\mathcal{L},$$

$$\begin{cases}D_3(\vec\lambda_k)e^{\mu_1(\vec\lambda_k)t_1}+D_4(\vec\lambda_k)t_1e^{\mu_1(\vec\lambda_k)t_1}=\varphi_{1k},\\ D_3(\vec\lambda_k)e^{\mu_1(\vec\lambda_k)t_2}+D_4(\vec\lambda_k)t_2e^{\mu_1(\vec\lambda_k)t_2}=\varphi_{2k},\end{cases}\ \text{if } k\in\mathcal{L}.$$

Let's denote

$$\Delta(\vec\lambda_k)=\begin{cases}e^{\mu_1(\vec\lambda_k)t_2+\mu_2(\vec\lambda_k)t_1}\left[e^{(\mu_2(\vec\lambda_k)-\mu_1(\vec\lambda_k))(t_2-t_1)}-1\right], & \text{if } k\in\mathbb{N}^p\setminus\mathcal{L},\\ (t_2-t_1)e^{\mu_1(\vec\lambda_k)(t_1+t_2)}, & \text{if } k\in\mathcal{L}.\end{cases} \tag{10}$$

Theorem 1. *In order that problem (1)–(3) have at most one solution in the space $C^2\left([0,T];E_{\alpha,\vec\beta}^b\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\vec\beta\in\mathbb{R}^p$, it is necessary and sufficiently that the following condition be satisfied*

$$\forall k\in\mathbb{N}^p\setminus\mathcal{L}\quad\forall\ell\in\mathbb{Z}\quad(\mu_2(\vec\lambda_k)-\mu_1(\vec\lambda_k))(t_2-t_1)\ne 2\pi i\ell. \tag{11}$$

Proof. The proof is carried out by the scheme used to prove theorem 5.3 in [7]. □

We get next result comes from Theorem 1 and formulas (9).

Corollary 1. *In order that problem (1)–(3) have the most one solution in the space $C^2\left([0,T];E_{\alpha,\vec\beta}^b\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\vec\beta\in\mathbb{R}^p$, it is necessary and sufficient that for each $(k_1,\dots,k_p)\in\mathbb{N}^p\setminus\mathcal{L}$ and each $\ell\in\mathbb{Z}$ at least one of the equations*

$$\sum_{j=1}^{p}(a_j^1-a_j^2)\lambda_{k_j}^b+\sum_{|s|<b}Re(A_s^1-A_s^2)\lambda_{k_1}^{s_1}\dots\lambda_{k_p}^{s_p}=0,\qquad \sum_{|s|<b}Im(A_s^1-A_s^2)\lambda_{k_1}^{s_1}\dots\lambda_{k_p}^{s_p}=\frac{2\pi\ell}{(t_2-t_1)}$$

doesn't hold.

Example 1. *For the problem*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial^4}{\partial x^4}+ia_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial^4}{\partial x^4}+ia_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=0,\quad (t,x)\in Q_T^1, \tag{12}$$

$$u(0,x)=0,\quad u(T,x)=0,\quad x\in(0,\pi), \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial^{2m}u(t,x)}{\partial x^{2m}}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial^{2m}u(t,x)}{\partial x^{2m}}\right|_{x=\pi}=0,\quad m\in\{0,1\}, \tag{14}$$

where $a>0$, $a_1,a_2\in\mathbb{R}$, $a_1\neq a_2$, $i^2=-1$, the determinant $\Delta(\lambda_k)$, $k\in\mathbb{N}$, is calculated by the formula

$$\Delta(\lambda_k)=\begin{cases} e^{(-ak^4+ia_1k^2)T}(e^{i(a_2-a_1)k^2T}-1), & \text{if } k\neq 0,\\ T, & \text{if } k=0.\end{cases}$$

So far as $|\Delta(\lambda_k)|=2e^{-ak^4T}|\sin(a_2-a_1)k^2T/2|$, $k\neq 0$, then the problem (12)–(14) has in space $C^2\left([0,T];E^b_{\alpha,\vec\beta}\right)$ only trivial solution, if number $(a_2-a_1)T/\pi$ is irrational. If number $(a_2-a_1)T/\pi$ is rational, then the problem (12)–(14) has in space $C^2\left([0,T];E^b_{\alpha,\vec\beta}\right)$ countable number of linear independent solutions

$$u_r(t,x)=e^{-16ar^4n^4t}\left(e^{4ia_1r^2n^2t}-e^{4ia_2r^2n^2t}\right)\sin(2rnx),\quad r\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

3 Existence of a Solution of the Problem

In what follows, we consider that the condition (11) is satisfied. Then for every $k\in\mathbb{N}^p$ there exists the unique solution $u_k(t)$ of the problem (7), (8) such that

$$u_k(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta(\vec\lambda_k)}\Big[(e^{\mu_2(\vec\lambda_k)t_2+\mu_1(\vec\lambda_k)t}-e^{\mu_1(\vec\lambda_k)t_2+\mu_2(\vec\lambda_k)t})\varphi_{1k}\\ \qquad+(e^{\mu_1(\vec\lambda_k)t_1+\mu_2(\vec\lambda_k)t}-e^{\mu_2(\vec\lambda_k)t_1+\mu_2(\vec\lambda_k)t})\varphi_{2k}\Big], & \text{if } k\in\mathbb{N}^p\setminus\mathcal{L},\\ \dfrac{1}{\Delta(\vec\lambda_k)}\Big[(t_2-t)e^{\mu_1(\vec\lambda_k)(t_2+t)}\varphi_{1k}+(t-t_1)e^{\mu_1(\vec\lambda_k)(t_1+t)}\varphi_{2k}\Big], & \text{if } k\in\mathcal{L}.\end{cases} \tag{15}$$

We get from equations (6), (15) that the solution of the problem (1)–(3) can be represented by the Fourier series

$$u(t,x)=\sum_{k\in\mathcal{L}}u_k(t)X_k(x)+\sum_{k\in\mathbb{N}^p\setminus\mathcal{L}}u_k(t)X_k(x). \tag{16}$$

The series (16) is, generally speaking, divergent, since the nonzero quantity $\Delta(\vec\lambda_k)$ can take very small for the infinite number of vectors $\vec\lambda_k\in\Lambda$. The following statement is true.

Theorem 2. *Suppose that condition (11) is satisfied and there exist $\omega\in\mathbb{R}$ and $\vec\nu\in\mathbb{R}^p$ such that for all (except a finite number) vectors $\vec\lambda_k\in\Lambda$ the following inequality holds*

$$|\Delta(\vec\lambda_k)|\geq w_k(-\omega;-\vec\nu;b). \tag{17}$$

If $\varphi_1,\varphi_2\in E^b_{\alpha_0,\vec\beta_0}$, where $\alpha_0=\alpha+\omega+2$, $\vec\beta_0=\vec\beta+\vec\nu-\vec\delta t_1$, $\vec\delta=(\delta_1,\dots,\delta_p)$, $0<\delta_j<\min\{a_j^1,a_j^2\}$, $j\in\{1,\dots,p\}$, then there exists the unique solution of the problem (1)–(3) from the space $C^2\left([0,T];E^b_{\alpha,\vec\beta}\right)$, which depends continuously on the functions φ_1,φ_2.

Proof. It follows from equations (9) that estimates

$$-(\vec\xi,\vec\lambda_k^b)\leq \mathrm{Re}\mu_q(\vec\lambda_k)\leq-(\vec\delta,\vec\lambda_k^b),\quad q\in\{1,2\}, \tag{18}$$

where $\vec\xi=(\xi_1,\dots,\xi_p)$, $\xi_j>\max\{a_j^1,a_j^2\}$, $j\in\{1,\dots,p\}$, are true for all (except a finite number) vectors $k\in\mathbb{N}^p$. So far as

$$|\mu_q(\vec\lambda_k)|\leq C_3|\vec\lambda_k^b|,\quad q\in\{1,2\},\quad C_3>\max\{a_j^1,a_j^2:j\in\{1,\dots,p\}\}, \tag{19}$$

then we'll get from estimates (18), (19) that

$$\forall t\geq 0\quad |(t^je^{\mu_q(\vec\lambda_k)t})^{(r)}|\leq C_4w_k(r;-\vec\delta t;b),\ j\in\{0,1\},\ q\in\{1,2\},\ r\in\{0,1,2\}. \tag{20}$$

Based on estimates (17), (20) we get from the formulas (10), (15) that

$$\max_{t\in[0,T]}\left|u_k^{(r)}(t)\right|\leq C_5\sum_{q=1}^{2}|\varphi_{qk}|w_k(2+\omega;\vec\nu-\vec\delta t_1;b),\quad k\in\mathbb{N}^p.$$

So

$$\begin{aligned}\left\|u;C^2\left([0,T];E^b_{\alpha,\vec\beta}\right)\right\|&\leq\sum_{r=0}^{2}\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}^p}\max_{t\in[0,T]}|u_k^{(r)}(t)|^2w_k^2(\alpha;\vec\beta;b)\Big)^{1/2}\\ &\leq C_6\sum_{q=1}^{2}\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}^p}|\varphi_{qk}|^2w_k^2(\alpha+\omega+2;\vec\beta+\vec\nu-\vec\delta t_1;b)\Big)^{1/2}\\ &=C_6\sum_{q=1}^{2}\left\|\varphi_q;E^{2b}_{\alpha_0,\vec\beta_0}\right\|.\end{aligned} \tag{21}$$

The proof of the theorem implies from the inequality (21). □

Remark 1. *If the conditions of Theorem 2 are satisfied then for each fixed $t_0\in[0,T]$ the function $u(t_0,x)$ belongs to the space $E^b_{\alpha,\vec\beta+\vec\delta t_0}$.*

The next statement describes the equations (1), for which estimate (17) is true with properly chosen indices $\omega\in\mathbb{R}$ and $\vec\nu=(\nu_1,\dots,\nu_p)\in\mathbb{R}^p$.

Theorem 3. *Suppose that for each $j\in\{1,\dots,p\}$ the following inequality holds*

$$a_j^1>a_j^2. \tag{22}$$

If $\omega=0$, $\vec\nu=\vec\xi(t_1+t_2)+\vec\eta(t_1-t_2)$, where $\vec\eta=(\eta_1,\dots,\eta_p)$, $0<\eta_j<a_j^1-a_j^2$, $j\in\{1,\dots,p\}$, then the estimate (17) holds for all (except for a finite number) vectors $\vec\lambda_k\in\Lambda$.

Proof. We get from inequalities (22) that for all (except for a finite number) vectors $\vec\lambda_k\in\Lambda$ the inequality

$$\mathrm{Re}\left(\mu_2(\vec\lambda_k)-\mu_1(\vec\lambda_k)\right)\geq(\vec\eta,\vec\lambda_k^b) \tag{23}$$

is true. It follows from the estimates (23) that the set $\mathcal{L}$ is not over finite. Let

$$N=\begin{cases}\max\limits_{k\in\mathcal{L}}|\vec\lambda_k^1|, & \text{if } \mathcal{L}\neq\varnothing,\\ 0, & \text{if } \mathcal{L}=\varnothing.\end{cases}$$

Then, for all $k \in \mathbb{N}^p$ such that $|\vec{\lambda}_k^1| > N$, the determinant of $\Delta(\vec{\lambda}_k)$ is calculated by the formula

$$\Delta(\vec{\lambda}_k) = e^{\mu_1(\vec{\lambda}_k)t_2+\mu_2(\vec{\lambda}_k)t_1}\left(e^{(\mu_2(\vec{\lambda}_k)-\mu_1(\vec{\lambda}_k))(t_2-t_1)} - 1\right). \tag{24}$$

Since for any $z \in \mathbb{C}$ such that $\operatorname{Re} z \geq \zeta > 0$, the inequality $|e^z - 1| \geq e^{\zeta} - 1$ is true, then based on estimates (23) we obtain from equation (24) that

$$|\Delta(\vec{\lambda}_k)| \geq e^{\operatorname{Re}(\mu_1(\vec{\lambda}_k)t_2+\mu_2(\vec{\lambda}_k)t_1)}\left|e^{(\vec{\eta},\vec{\lambda}_k^b)(t_2-t_1)} - 1\right|,$$

for $|\vec{\lambda}_k^1| > N$. Considering that $e^{\zeta} - 1 \geq \frac{1}{2}e^{\zeta}$ for all $\zeta \geq 1$, and the fact that for all (except for a finite number) the inequalities (18) are satisfied, we obtain that the inequality

$$|\Delta(\vec{\lambda}_k)| \geq e^{-(\vec{\xi}(t_1+t_2)+\vec{\eta}(t_1-t_2),\vec{\lambda}_k^b)}$$

holds for all (except for a finite number of) vectors $K \in \mathbb{N}^p$. Theorem is proved. □

4 Metric Estimates of Small Denominators

Let's study the question of possibility for inequality (17). Let us provide some concepts related to ρ-Hausdorff measure and Hausdorff dimension of the set $M \subset \mathbb{R}^p$, for the ease of presentation.

Definition 1. *A limit (finite or infinite)*

$$\dim_\rho M = \lim_{\delta\to 0}\inf\sum_{j=1}^{\infty}(\operatorname{diam} S_j)^\rho,$$

where the infimum is taken over all coverings of the set M by the balls S_j, $j = 1, 2, \ldots$, such that $M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$ and diameter of each ball S_j is not greater than δ, $\operatorname{diam} S_j \leq \delta$, is called ρ-Hausdorff measure of the set $M \subset \mathbb{R}^p$ (this limit we denote by $\dim_\rho M$).

Definition 2. *A real number β such that*
1) $\forall\rho\ \ \beta \leq \rho \leq p\ \ \dim_\rho M = 0$,
2) $\forall\rho\ \ 0 < \rho < \beta\ \dim_\rho M = \infty$,

is called the Hausdorff dimension of the set $M \subset \mathbb{R}^p$.

We will use statements, proof of which is contained in [1].

Theorem 4. *The set $M \subset \mathbb{R}^p$ has zero ρ-Hausdorff measure if and only if when there exists a covering by balls $\{S_j\}_{j=1}^{\infty}$ of the set M such that $\sum_{j=1}^{\infty}(\operatorname{diam} S_j)^\rho < \infty$, and that every point of the set M belongs to an infinite number of balls S_j.*

We denote $s_{j,q} = (\underbrace{0,\ldots,0,q}_{j},0,\ldots,0)$, $j \in \{1,\ldots,p\}$, $q \in \{1,\ldots,b-1\}$, the multiindex of the length p which j-th place is q and the rest places are zero;
$y_j^q = \operatorname{Im}(A^1_{s_{j,q}} - A^2_{s_{j,q}})$, $q \in \{1,\ldots,b-1\}$, $j \in \{1,\ldots,p\}$,
$\vec{y}^q = (y_1^q,\ldots,y_p^q)$, $q \in \{1,\ldots,b-1\}$;
$G = [c_1,d_1] \times \ldots \times [c_p,d_p]$, $c_j, d_j \in \mathbb{R}$, $c_j < d_j$, $j \in \{1,\ldots,p\}$.

Theorem 5. *Let $\rho \in (p-1;p]$ and $q \in \{1,\ldots,b-1\}$. The inequality (17) holds for almost all (respectively ρ-Hausdorff measure) vectors $\vec{y}^q \in G$ and for all (except for a finite number) vectors $k \in \mathbb{N}^p$ if $\omega > \omega_1(q)$, $\vec{\nu} = \vec{\xi}(t_1+t_2)$, where $\vec{\xi} = (\xi_1,\ldots,\xi_p)$, $\xi_j > \max\{a_j^1, a_j^2\}$, $j \in \{1,\ldots,p\}$,*

$$\omega_1(q) = \frac{p/(2b)+1-1/b}{\rho-p+1} - \frac{q}{2b}, \quad q \in \{1,\ldots,b-1\}.$$

Proof. Fix $q \in \{1,\ldots,b-1\}$. Let

$$F_q(\vec{\lambda}_k) = \sum_{|s|<b}\operatorname{Im}(A_s^1 - A_s^2)\lambda_{k_1}^{s_1}\ldots\lambda_{k_p}^{s_p} - \sum_{j=1}^{p} y_j^q\lambda_{k_j}^q.$$

Let's denote by $V^\omega(\vec{\lambda}_k, m)$ a set of vectors $\vec{y}^q \in G$ for which the inequality

$$\left|\sum_{j=1}^{p} y_j^q\tau\lambda_{k_j}^q + F_q(\vec{\lambda}_k)\tau - m\right| < |\vec{\lambda}_k^b|^{-\omega}, \quad \tau = (t_2-t_1)/\pi,$$

is true for a fixed $\vec{\lambda}_k \in \Lambda$ and $m \in \mathbb{Z}$ and by V^ω the set of vectors $\vec{y}^q \in G$, which belong to an infinite number of sets $V_q^\omega(\vec{\lambda}_k, m)$, $\vec{\lambda}_k \in \Lambda$, $m \in \mathbb{Z}$. Obviously there exists the number $C_7 = C_7(p, b, c_1, \ldots, c_p, d_1, \ldots, d_p) > 0$ such that for all $m \in \mathbb{Z}$, $|m| > C_7|\vec{\lambda}_k^{b-1}|$, the set $V^\omega(\vec{\lambda}_k, m)$ is empty.

We now consider the case when $|m| \leq C_7|\vec{\lambda}_k^{b-1}| = M(\lambda_k)$. Let $\lambda_{k_{j_0}} = \max_{j\in\{1,\ldots,p\}}\{\lambda_{k_j}\}$, and $V^\omega(\vec{\lambda}_k, m, y_1^q, \ldots, y_{j_0-1}^q, y_{j_0+1}^q, \ldots, y_p^q) = \{y_{j_0}^q \in \mathbb{R} : (y_1^q, \ldots, y_p^q) \in V^\omega(\vec{\lambda}_k, m)\}$. If $V^\omega(\vec{\lambda}_k, m) \neq \varnothing$, then there exist $y_1^q, \ldots, y_{j_0-1}^q, y_{j_0+1}^q, \ldots, y_p^q$ such that $V^\omega(\vec{\lambda}_k, m, y_1^q, \ldots, y_{j_0-1}^q, y_{j_0+1}^q, \ldots, y_p^q)$ is not empty interval $\left(\tau|\vec{\lambda}_k^b|^\omega\lambda_{k_{j_0}}^q\right)^{-1}$. Then the set $V^\omega(\vec{\lambda}_k, m)$ can be covered by the balls $S_r(\vec{\lambda}_k, m)$, $r \in \{1, \ldots, J(\vec{\lambda}_k)\}$, of the radius $\left(\tau|\vec{\lambda}_k^b|^\omega\lambda_{k_{j_0}}^q\right)^{-1}$, amount $J(\vec{\lambda}_k)$ of which does not exceed $C_8\left(|\vec{\lambda}_k^b|^\omega\lambda_{k_{j_0}}^q\right)^{p-1}$. Note that for $\omega > \omega_1(q)$ the inclusion

$$V^\omega = \bigcap_{K=0}^{\infty}\ \bigcup_{|\vec{\lambda}_k|\geq K}\ \bigcup_{0\leq|m|\leq M(\vec{\lambda}_k)} V^\omega(\vec{\lambda}_k, m) \subset \bigcap_{K=0}^{\infty}\ \bigcup_{|\vec{\lambda}_k|\geq K}\ \bigcup_{0\leq|m|\leq M(\lambda_k)}\ \bigcup_{r=1}^{J(\vec{\lambda}_k)} S_r(\vec{\lambda}_k, m) \tag{25}$$

is correct. Therefore, each point of the set V^ω belongs to an infinite number of the balls $S_r(\vec{\lambda}_k, m)$, $r \in \{1, \ldots, J(\vec{\lambda}_k)\}$, $0 \leq |m| \leq M(\vec{\lambda}_k)$, $\vec{\lambda}_k \in \Lambda$. On the basis of estimates (5) we obtain from (25) that

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}^p}\ \sum_{0\leq|m|\leq M(\vec{\lambda}_k)}\ \sum_{r=1}^{J(\vec{\lambda}_k)}\left(\operatorname{diam} S_r(\vec{\lambda}_k, m)\right)^\rho &= \sum_{k\in\mathbb{N}^p}\ \sum_{0\leq|m|\leq M(\vec{\lambda}_k)}\ \sum_{r=1}^{J(\vec{\lambda}_k)}\left(\frac{1}{\tau|\vec{\lambda}_k^b|^\omega\lambda_{k_{j_0}}^q}\right)^\rho \\ &\leq C_9\sum_{k\in\mathbb{N}^p}\frac{1}{|\vec{\lambda}_k^1|^{(\omega b+q)(\rho-p+1)-b+1}} \leq C_{10}\sum_{k\in\mathbb{N}^p}\frac{1}{|k|^{2((\omega b+q)(\rho-p+1)-b+1)}}.\end{aligned} \tag{26}$$

For $\omega > \frac{p/(2b)+1-1/b}{\rho-p+1} - \frac{q}{b}$ the series (26) is converges, then by Theorem 4 the ρ-Hausdorff measure of the set V^ω is equal to zero. To complete the proof of the theorem it is given that

$$|\Delta(\vec{\lambda}_k)| \geq e^{\operatorname{Re}\mu_1(\vec{\lambda}_k)t_2+\operatorname{Re}\mu_2(\vec{\lambda}_k)t_1}\left|\sin\left(\operatorname{Im}(\mu_2(\vec{\lambda}_k) - \mu_1(\vec{\lambda}_k))(t_2-t_1)\right)\right|, \quad k \in \mathbb{N}^p \setminus \mathcal{L}, \tag{27}$$

and that

$$\left|\sin\left(\mathrm{Im}(\mu_2(\vec{\lambda}_k)-\mu_1(\vec{\lambda}_k))(t_2-t_1)\right)\right| \geq \frac{2}{\pi}\left|\mathrm{Im}(\mu_2(\vec{\lambda}_k)-\mu_1(\vec{\lambda}_k))(t_2-t_1)-m\,\pi\right| = 2\left|\sum_{|s|<b}\mathrm{Im}(A_s^1-A_s^2)\tau\lambda_{k_1}^{s_1}\dots\lambda_{k_p}^{s_p}-m\right|, \tag{28}$$

where $\tau=(t_2-t_1)/\pi$ and an integer m is such that

$$-1/2 \leq \sum_{|s|<b}\mathrm{Im}(A_s^1-A_s^2)\tau\lambda_{k_1}^{s_1}\dots\lambda_{k_p}^{s_p}-m<1/2.$$

Based on the estimates (18), (27) and (28) we get that for almost all (respectively to the ρ-Hausdorff measure) vectors $\vec{y}^q \in G$ the inequality

$$|\Delta(\vec{\lambda}_k)| \geq |\vec{\lambda}_k^b|^{-(p/(2b)+1-1/b)/(\rho-p+1)+q/b}e^{-(\vec{\xi}(t_1+t_2),\vec{\lambda}_k^b)}$$

is true for all (except of a finite number) vectors $\vec{\lambda}_k \in \Lambda$. Theorem is proved. □

Let $H_q^{\omega,\vec{v}}$, $\omega\in\mathbb{R}$, $\vec{v}\in\mathbb{R}^p$, be a set of vectors $\vec{y}^q \in G$, for which the estimate (17) is true. From Theorem 5 the next corollary about the Hausdorff dimension of the set $G\backslash H_q^{\omega,\vec{v}}$ follows.

Corollary 2. *For each $q\in\{1,\dots,b-1\}$ and arbitrary $\omega>\frac{p}{2b}+1-\frac{q+1}{b}$ the Hausdorff dimension of the set $G\backslash H_q^{\omega,\vec{v}}$ is less than $p-1+\frac{p/(2b)+1-1/b}{\omega+q/b}$, if $\vec{v}=\vec{\xi}(t_1+t_2)$.*

Remark 2. *Theorem 5 complements the results of [11].*

5 CONCLUSIONS

The theorems of existence and uniqueness of the solution of the problem (1)–(3) in the space of exponential type are established. The lower bound estimates of small denominators for almost all (respectively to ρ-Hausdorff measure) vectors $\vec{y}^q \in G$ are established. A class of problems with conditions (2), (3) for equations (1) for which there is no problem of small denominators, is subscribed.

The results can be extended to the next problem

$$\prod_{q=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{j=1}^{p}a_j^qL_j^b+A_q(L_1,\dots,L_p)\right)u(t,x)=0,$$

$$u(t_j,x)=\varphi_j(x),\quad t_j=(j-1)t_0,\quad j\in\{1,\dots,n\},\ t_0=T/(n-1),$$

where $a_j^q>0$, $A_q(L_1,\dots,L_p)=\sum\limits_{|s|<b}A_q^sL_1^{s_1}\dots L_p^{s_p}$, $A_s^q\in\mathbb{C}$, $q\in\{1,\dots,n\}$.

REFERENCES

[1] Bernik V.I., Melnithuk Yu.V. Diophantine approximation and Hausdorff dimension. Science and technic, Minsk, 1988. (in Russian)

[2] Bobyk I.O., Symotyuk M.M. *Estimates of characteristic determinants of the problem with two multiple nodes for linear factorized partial differential equations.* Bull. Chernivtsi Univ. Mat. Series 2007, **336–337**, 20–28. (in Ukrainian)

[3] Vasylyshyn P.B., Klyus I.S., Ptashnyk B.Yo. *Multipoint problem for linear equations with variable coefficients.* Ukrainian Math. J. 1996, **48** (11), 1659–1668. doi:10.1007/BF02529487 (translation of Ukrain. Mat. Zh. 1996, **48** (11), 1468–1476. (in Ukrainian))

[4] Gadetskaya S.V. *Well-posed multipoint problems in a strip for differential equations with loaded.* Sov. Math. 1989, **33** (3), 129–134. (translation of Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Math. 1989, **3**, 79–82. (in Russian))

[5] Klyus I.S, Nytrebych Z.M. *Multipoint problem for the partial differential equation with expanded in the product of linear differential factors.* Bull. National Univ. "Lviv Polytechnic" Appl. Math. 2000, **407**, 220–226. (in Ukrainian)

[6] Petrovskyi I.G. Lectures on partial differential equations. Intersciences, New York, 1954. (in Russian)

[7] Ptashnyk B.Yo. Ill-posed boundary-value problrms for partial differential equations. Naukova Dumka, Kiev, 1984. (in Ukrainian)

[8] Ptashnyk B.Yo., Galun K.S. *Multipoint problem for factorized hyperbolic-parabolic operators.* Reports NAS of Ukraine 2009, **11**, 33–38. (in Ukrainian)

[9] Ptashnyk B.Yo., Symotyuk M.M. *Multipoint problem for nonisotropic partial differential equations with constant coefficients.* Ukrainian Math. J. 2003, **55** (2), 293–310. doi:10.1023/A:1025468413500 (translation of Ukrain. Mat. Zh. 2003, **55** (2), 241–254. (in Ukrainian))

[10] Ptashnyk B.Yo., Tymkiv I.R. *Multipoint problem for parabolic equation with variable coefficients in a cylindrical domain.* Math. Methods Phys. Mech. Fields 2011, **54** (1), 15–26. (in Ukrainian)

[11] Syluga L. P. *Multipoint problem for parabolic equation with constant coefficients.* Math. Methods Phys. Mech. Fields 2000, **43** (4), 42-48. (in Ukrainian)

Received 28.09.2014

Симотюк М.М., Тимків І.Р. *Задача з двоточковими умовами для параболічного рівняння другого порядку за часом* // Карпатські матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — C. 351–359.

Встановлено умови коректної розв'язності задачі з двоточковими умовами за часовою змінною та умовами типу Діріхле за просторовими координатами для лінійного параболічного рівняння. Для доведення оцінок знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку задачі, використано метричний.

Ключові слова і фрази: параболічне рівняння, двоточкова задача, ряд Фур'є, малі знаменники, міра Гаусдорфа.

Сымотюк М.М., Тымкив И.Р. *Задача с двухточечными условиями для параболического уравнения второго порядка по времени* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 351–359.

Найдены условия корректности задачи с двухточечными условиями по временной переменной и условиями типа Дирихле по пространственным координатам для линейного параболического уравнения. Для доказательства оценок снизу малых знаменателей, возникших при построении решения задачи, использован метрический подход.

Ключевые слова и фразы: параболическое уравнение, двухточечная задача, ряд Фурье, малые знаменатели, мера Хаусдорфа.

ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, 6 (2), 360–366
doi:10.15330/cmp.6.2.360-366

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.360–366

SOROKIN O.S.

FINITE HOMOMORPHIC IMAGES OF BEZOUT DUO-DOMAINS

It is proved that for a quasi-duo Bezout ring of stable range 1 the duo-ring condition is equivalent to being an elementary divisor ring. As an application of this result a couple of useful properties are obtained for finite homomorphic images of Bezout duo-domains: they are coherent morphic rings, all injective modules over them are flat, their weak global dimension is either 0 or infinity. Moreover, we introduce the notion of square-free element in noncommutative case and it is shown that they are adequate elements of Bezout duo-domains. In addition, we are going to prove that these elements are elements of almost stable range 1, as well as necessary and sufficient conditions for being square-free element are found in terms of regularity, Jacobson semisimplicity, and boundness of weak global dimension of finite homomorphic images of Bezout duo-domains.

Key words and phrases: Bezout ring, duo-domain, distributive ring, stable range 1, square-free element, adequate element, von Neumann regular ring, morphic ring, weak global dimension.

Ivan Franko National University, 1 Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine
E-mail: neverhalluet@gmail.com

INTRODUCTION

All the rings considered in the article are supposed to be associative with nonzero identity element. In [21] it is proved that any right distributive elementary divisor ring satisfies the condition: for any element $a \in R$ one can find an element $b \in R$ such that $RaR = bR = Rb$. Moreover, in the same paper the authors have proved that such a ring has to be a duo-ring if all its zero divisors are in the Jacobson radical. As a consequence we will obtain the following result.

Theorem 1 ([21]). *Any right distributive elementary divisor domain is a duo-domain.*

On the other hand, in [11] the author has proved that *for any elementary divisor ring, the conditions of being right distributive, left distributive, right quasi-duo, left quasi-duo ring and duo-ring are equivalent*. Also the same author proves in [12] that *a right Bezout ring is right distributive if and only if it is a right quasi-duo ring*, and *a right distributive ring is an arithmetical ring, and if it is a right duo-ring then the reverse inclusion holds*.

Here we need to mention that the quasi-duo rings have been studied in [6, 15], where the reader can find the proofs of their basic properties and their connections to the classes of regular and exchange rings. Furthermore, for the Bezout rings (as well as the arithmetical rings) the quasi-duo conditions have tight connection to the right distributivity of lattice of its right ideals.

УДК 512.552.12
2010 *Mathematics Subject Classification:* 16U80.

We are going to prove below in this article that the *"duo-ring" condition in Theorem 1 is not only necessary but is also sufficient in the case when R is a right quasi-duo Bezout ring of stable range 1*. The latter means that condition of zero divisors being in Jacobson radical can be omitted.

All mentioned information will be applied to the finite homomorphic images of a Bezout duo-domain R and some corollaries will be obtained for the ring R/aR in the case when a is a square-free element. Actually, we will prove that a is a square-free element of a Bezout duo-domain R if and only if R/aR is a von Neumann regular ring if and only if R/aR has zero Jacobson radical if and only if the weak global dimension of R/aR is finite if and only if R/aR has weak global dimension 0.

Finally, from this fact we conclude that the square-free elements of the Bezout duo-domains are elements of almost stable range 1.

We recall some definitions and facts that we will need below in our proofs. All other notions can be found in [7, 8, 16, 18–20].

Hyman Bass in [1] introduced the notion of stable range that became one of the main K-theory invariants later. This invariant can be used for solving problems of matrix diagonalization over rings [19] and their relations to other classes of rings. Its definition is left-right symmetric due to [14]. Below we will use stable range condition for specific values of n, in fact for $n = 1$ and $n = 2$.

Definition 1. *We say that a ring R is has the stable range 1 if for any elements $a, b \in R$ the equality $aR + bR = R$ implies that there is some $x \in R$ such that $a + bx$ is an invertible element in R.*

If for any elements a, b, c in a ring R the equality $aR + bR + cR = R$ implies that there are some elements $x, y \in R$ such that $(a + cx)R + (b + cy)R = R$ then we say that the stable range of R is equal to 2.

An element a in a ring R is called an almost stable range 1 element if the stable range of R/aR is equal to 1.

Since in the duo-ring case every von Neumann regular ring is strongly regular, the stable range of R/aR becomes equal to 1 when R/aR is von Neumann regular duo-ring.

Here we gather some results concerning our topic.

Theorem 2. *1) A right Bezout ring of stable range 1 is a right Hermite ring [18].*

2) For any elements a, b in a right Bezout ring R of stable range 1 one can find some elements $x, d \in R$ such that $a + bx = d$ and $aR + bR = dR$ [18].

3) Every matrix A over a right Hermite ring R can be reduced to the lower triangular matrix AU via the right multiplication by some invertible matrix U [5].

4) If all 2×2, 2×1 and 1×2 matrices over a ring R admit canonical diagonal reduction then R is an elementary divisor ring [5].

In [7] it is proved that the left morphic rings are the right P-injective. In addition it is useful to mention that a pair (a, b) of elements of a ring R in the previous theorem is called a *left morphic pair* and this fact will be denoted as $a \sim_l b$. Similarly for the right case we use the notation $a \sim_r b$.

1 RIGHT QUASI-DUO ELEMENTARY DIVISOR RINGS

Before proving one of the main results we need the following lemma.

Lemma 1. *Let R be a Bezout duo-ring of stable range 1. If for any elements $a, b, c \in R$ such that $aR + bR + cR = R$ there are some elements $p, q \in R$ such that $(pa + qb)R + qcR = R$ then R is an elementary divisor ring.*

Proof. According to Theorem 2 the Bezout duo-ring R of stable range 1 is a Hermite ring, so it is sufficient to prove the statement for the matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, where $aR + bR + cR = R$. By given assumption there are some elements $p, q \in R$ such that $(pa + qb)u + qcv = 1$, for some $u, v \in R$. By Theorem 2 there are some invertible matrices $P = \begin{pmatrix} p & q \\ * & * \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} u & * \\ v & * \end{pmatrix}$, such that the element c_{11} of the matrix $C = PAQ$ is equal to 1, and then obviously the matrix C (as well as matrix A) admits canonical diagonal reduction. Thus R is an elementary divisor ring as was desired. The lemma is proved. □

Theorem 3. *Let R be a Bezout quasi-duo ring of stable range 1. Then R is an elementary divisor ring if and only if it is a duo-ring.*

Proof. As it was mentioned at the beginning and is proved in [11] being a quasi-duo elementary divisor ring implies the duo-ring condition, so the necessity is proved.

For the proof of the sufficiency suppose that we have any triple $a, b, c \in R$ such that $aR + bR + cR = R$. By Theorem 6 there are some elements $z, h \in R$ such that $b + cz = h$ and $bR + cR = hR$. So, $aR + hR = R$ implies that there exists $q \in R$ such that $a + qh = g \in U(R)$, since $st.r.(R) = 1$. After the substitution we obtain $ag^{-1} + q(b + cz)g^{-1} = 1$ and the rearranging gives $(a + qb)g^{-1} + (qc)(zg^{-1}) = 1$ that means $(a + qb)R + qcR = R$. By Lemma 1 above R is an elementary divisor ring. The theorem is proved. □

Corollary 1. *A right distributive Bezout ring of stable range 1 is an elementary divisor ring if and only if it is a duo-ring.*

Example 1. *For any Bezout ring of stable range 1 the rings of upper triangular matrices over R satisfy conditions of Theorem 3. The same we have for a ring $R[[x]]$ of a formal power series over any strongly regular ring R. However, there are rings that fail the conditions of Theorem 3. The ring of formal power series $R\langle\langle x, y\rangle\rangle$ over a division ring R of two non-commuting variables is a quasi-duo ring, but is not a right duo-ring, therefore cannot be an elementary divisor ring.*

2 Finite homomorphic images of Bezout duo-domains

The importance of the duo-ring conditions for the non-commutative Bezout rings was shown in the previous section. Now our goal is to determine what properties of the finite homomorphic images of the commutative Bezout domains are preserved in the duo-situation. Below we give some analogues of the results proved in [8, 13, 17, 19].

Theorem 4. *If R is a Bezout duo-domain and $a \in R$ is some its nonzero element then R/aR coincides with its classical ring of quotients: $Q(R/aR) = R/aR$, and R/aR is an almost Baer, P-injective, coherent, reversible morphic IF-ring of weak global dimension equal either to 0 or the infinity, where the left and right morphic pairs coincide.*

Proof. For any element $b \in R$ the only possible situations are: either $aR + bR = R$ or $aR + bR = dR$. In the first case one can find some $u, v \in R$ such that $au + bv = 1$, and its image in $\overline{R} = R/aR$ is $\overline{b}\overline{v} = \overline{1}$, and so $\overline{b}$ is right invertible in $\overline{R}$. Since R is a duo-domain, $Ra + Rb = aR + bR = R$ and similarly we obtain that $\overline{b}$ is left invertible as well. Thus such $\overline{b}$ will be invertible. In the case when $aR + bR = dR$ there are some $x, y \in R$ such that $a = dx, b = dy, xR + yR = R$. Then using the fact that R is a duo-domain $bx = dyx = zdx = za \in aR$ for some $z \in R$. Hence $\overline{b}$ in $\overline{R}$ is a left zero divisor. Similarly we can obtain that it is a right zero divisor as well. Thus the localization that leads to the classical ring of quotients coincides with R/aR.

Let us show that $\overline{R}$ is a right almost Baer ring, that is we have to show that $r(\overline{b})$ is a right principal ideal for any $\overline{b} \in \overline{R}$. Suppose that $\overline{t} \in r(\overline{b})$, that is $\overline{b}\overline{t} = \overline{0}$, or it is the same as $bt = as$, for some $s \in R$. Suppose that $bR + aR = hR$. If $hR = R$ then $\overline{b}$ is a unit by property 1 and its right annihilator is a right principal ideal generated by zero. Suppose that $hR \neq R$. Since R is a Bezout domain we can state that $a = hx, b = hy, xR + yR = R$ for some elements $x, y \in R$. Hence the equality $bt = as$ implies $hyt = hxt$, and, after the cancelation, $yt = xs$. Since x, y are coprime, then x has to be a divisor of t, that is $t \in xR$ hence $r(\overline{b}) \subseteq \overline{x}\overline{R}$. For any $xr \in xR$ we have that $bxr = hyxr = y_1hxr = y_1ar = ay_2r \in aR$, for some $y_1, y_2 \in R$. The latter means that $\overline{xr} \in r(\overline{b})$ and $\overline{x}\overline{R} \subseteq r(\overline{b})$. At last we have obtained that $\overline{x}\overline{R} = r(\overline{b})$, thus R/aR is a right almost Baer ring. Similarly it is a left almost Baer ring.

Suppose that we have in $\overline{R}$ the inclusion $r(\overline{c}) \subseteq r(\overline{b})$. Let $aR + cR = dR$ and then $a = dx, c = dy$. As $cx = dyx = dxy_1 = ay_1$ for some $y_1 \in R$, as it is a duo-domain. Hence $\overline{c}\overline{x} = \overline{0}$ and $\overline{x} \in r(\overline{c}) \subseteq r(\overline{b})$, so $\overline{b}\overline{x} = \overline{0}$. The latter means that there is some $k \in R$ such that $bx = ak$. Since R is a duo-domain, there exists $h \in R$ such that $bx = ak = ha = hdx$. After the cancelation we obtain $b = hd \in Rd$. Then $\overline{b} \in \overline{R}\overline{d} = \overline{R}\overline{c}$ and $\overline{R}\overline{b} \subseteq \overline{R}\overline{c}$. Thus R/aR is a right P-injective by [8]. Case of a left P-injective case is similar.

Finally, in [2] it is proved that a Bezout ring R is a right and left IF-ring if and only if it is coherent and P-injective. By [3, 10] we know that every IF-ring either has zero weak global dimension or it is infinite.

Suppose that $\overline{x} \in \overline{R} = R/aR$. Then by previous properties we have that there are some $y, z \in R$ such that $l(\overline{x}) = \overline{R}\overline{y} \Rightarrow \overline{x}\overline{R} = rl(\overline{x}) = r(\overline{y})$
$r(\overline{x}) = \overline{x}\overline{R} \Rightarrow \overline{R}\overline{x} = lr(\overline{x}) = r(\overline{z})$. Since $\overline{R}$ is also a duo-ring, $\overline{x}\overline{R} = \overline{R}\overline{x}$ and thus $r(\overline{y}) = l(\overline{z})$.

Let us consider two homomorphisms $f, g : \overline{R} \to \overline{R}$ defined by $f(\overline{r}) = \overline{r}\overline{x}, g(\overline{r}) = \overline{x}\overline{r}$. By the First Isomorphism Theorem, $\overline{R}/Ker(f) = \overline{R}/l(\overline{x}) \cong \overline{R}\overline{x}, \overline{R}/Ker(g) = \overline{R}/r(\overline{x}) \cong \overline{x}\overline{R}$. However $\overline{x}\overline{R} = \overline{R}\overline{x}$ and therefore $\overline{R}/l(\overline{x}) \cong \overline{R}/r(\overline{x})$ or $\overline{R}/\overline{z}\overline{R} \cong \overline{R}/\overline{R}\overline{y} = \overline{R}/\overline{y}\overline{R}$. Consider the commutative diagram with exact rows,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \overline{y}\overline{R} \arrow[r] \arrow[d, "j"] & \overline{R} \arrow[r] \arrow[d, "="] & \overline{R}/\overline{y}\overline{R} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \overline{z}\overline{R} \arrow[r] & \overline{R} \arrow[r] & \overline{R}/\overline{z}\overline{R} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

where there exists the unique isomorphism $j : \overline{y}\overline{R} \to \overline{z}\overline{R}$ augmenting this diagram by [9]. Thus, we have: $\overline{x}\overline{R} = r(\overline{y}), r(\overline{x}) = \overline{z}\overline{R} \cong \overline{y}\overline{R}, \overline{R}\overline{x} = l(\overline{z}), l(\overline{x}) = \overline{R}\overline{y} = \overline{y}\overline{R} \cong \overline{z}\overline{R} = \overline{R}\overline{z}$. Therefore, by [7] R/aR is the left and right morphic ring. For proving that the left and right morphic pairs coincide we need the following simple fact: if $xR \cong yR$ in a right P-injective ring R then $xR = yR$. Hence we conclude that $\overline{y}\overline{R} \cong \overline{z}\overline{R}$ implies $\overline{y}\overline{R} = \overline{z}\overline{R}$, therefore the left and right morphic pairs coincide. Since the right and left morphic pairs in $\overline{R}$ coincide, for any $\overline{b} \in \overline{R}$ we can find $\overline{c} \in \overline{R}$ such that $l(\overline{b}) = \overline{R}\overline{c} = \overline{c}\overline{R} = r(\overline{b})$. The latter equality means that R/aR is a reversible ring.

As we have proved that R/aR is an almost Baer ring, the only thing we need is to prove that the intersection of any two right (and left) principal ideals is again a right (and left) principal ideal. Consider the ideals $\overline{bR}, \overline{cR}$. Using property 2 we see that there are some $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{R}$ such that $\overline{bR} = r(\overline{x}), \overline{cR} = r(\overline{y})$. Then $\overline{rR} \cap \overline{cR} = r(\overline{x}) \cap r(\overline{y}) = r(\overline{xR} + \overline{yR}) = r(\overline{zR}) = \overline{dR}$, where $\overline{z}, \overline{d}$ are some elements in $\overline{R}$. We conclude that R/aR is a right (and similarly left) coherent ring by the definition. The theorem is proved. □

Gatalevych [4] was the first researcher who studied a noncommutative theory of adequate rings and their generalizations. We are also making an effort to deal with this theory.

Definition 2. *A nonzero element a in a ring R is said to be right adequate if for any nonzero element $b \in R$ we can find two elements $r, s \in R$ such that the decomposition $a = sr$ satisfies the following properties: $rR + bR = R$ and $s'R + bR \neq R$, where $sR \subseteq s'R \neq R$.*

Similarly, a left adequate element can be defined. In the case of a duo-ring these notions coincide and we simply talk on adequate elements. At first, the examples of adequate elements are the units, irreducible elements, and all square-free elements of a ring. Here is the definition of a square-free element.

Definition 3. *A nonzero element a in a ring R is called a square-free element if having any its decomposition $a = xy$, where $x, y \in R$, one can conclude that $xR + yR = R$ and $Rx + Ry = R$.*

It is useful to notice that there are rings without square-free elements, for example such is the ring of all algebraic integers.

Proposition 1. *All square-free elements of a Bezout duo-domain are adequate.*

Proof. Let $a, b \in R$, where a is a square-free element. Then $aR + bR = dR$, $a = da_0$, $b = db_0$, $a_0R + b_0R = R$ for some elements $d, a_0, b_0 \in R$. Since a is a square free element, $a_0R + dR = R$. The latter equality implies $a_0R + bR = R$ and the decomposition $a = sr$, where $s = d$, $r = a_0$ is the one that was desired. The statement is proved. □

Theorem 5. *Let R be a Bezout duo-domain and a be some its nonzero element. The following statements are equivalent:*

1) a is a square-free element;
2) R/aR is a von Neumann regular ring;
3) $J(R/aR) = 0$;
4) $\mathrm{w.gl.dim}(R/aR) = 0$;
5) $\mathrm{w.gl.dim}(R/aR)$ is finite.

Proof. 1 ⇒ 2. Suppose that a is a square-free element. Let $\overline{y} \in \overline{R} = R/aR$ be an arbitrary element. If $\overline{y}$ is not invertible then by Theorem 4, $\overline{y}$ is a zero divisor, that is $\overline{xy} = 0$ for some element $\overline{x}$ in $\overline{R}$. Then $xy = ak' = ka$, for some $k, k' \in R$. Suppose that $kR + xR = dR = Rd$, and $k = dk_0$, $x = x_0d$, $x_0R + k_0R = R$, for some $x_0, k_0 \in R$. Hence $dx_0y = dk_0a$ and cancellating by d we have $x_0y = k_0a$. Since x_0 and k_0 are coprime, k_0 has to be a divisor of y, that is $y = k_0y_0$ for some $y_0 \in R$. Since R is a duo-domain, there is some $x_1 \in R$ such that $x_0k_0y_0 = k_0x_1y_0 = k_0a$ hence $a = x_1y_0$. Since a is a square-free element, we can conclude that $x_1R + y_0R = R$. Then for some elements $p, q, u, v \in R$ we have $x_1u + y_0v = 1$, $x_0p + k_0q = 1$. Multiplying the first equality by k_0 we obtain $k_0x_1u + k_0y_0v = k_0$ and $x_0p + (x_0k_0u + yv)q = 1$. The latter equality implies $x_0R + yR = R$. Since $x_0y = k_0a$, we conclude that $\overline{x_0y} = \overline{0}$. As x_0, y are coprime in R, this is preserved in $\overline{R}$. Therefore, there are elements $\overline{m}, \overline{n} \in \overline{R}$ such that $\overline{x_0m} + \overline{yn} = \overline{1}$. The ring R/aR is reversible by Theorem 13, therefore $\overline{yx_0} = \overline{0}$. Finally, $\overline{yx_0m} + \overline{y}^2\overline{n} = \overline{y}$ implies $\overline{y}^2\overline{n} = \overline{y}$, thus R/aR is a von Neumann regular ring.

2 ⇒ 3. The proof is obvious as this is a property of each von Neumann regular ring.

3 ⇒ 1. Suppose that $a = bc$, where b and c have g.c.d. $d \neq 1$. Then $\overline{x} \in J(R/aR)$ if and only if for any $r, s \in R$ we have $(1 - rxs)R + aR = R$. However the Jacobson radical is zero, thus $x \in aR = Ra$. The equality $bR + cR = dR$ implies $b = db_0$, $c = dc_0$, where $b_0, c_0 \in R$. Suppose that $(1 - b_0dc_0)R + aR = hR$. Then there are some $a', x \in R$ such that $a = ha', 1 - b_0dc_0 = hx$. Hence $hR + (b_0dc_0)R = R$. Since $d(b_0dc_0) = ha'$, the element b_0dc_0 has to divide a', namely $a' = b_0dc_0k$, for some $k \in R$. Furthermore, $a = db_0dc_0 = ha' = hb_0dc_0k = hk'(b_0dc_0)$, for some $k' \in R$. Hence $d = hk'$. From the duo-ring condition we know that $Rh + Rb_0dc_0 = R$ and there are $u, v \in R$ such that $uh + vb_0dc_0 = 1$. After the right multiplication by k' we obtain $d = hk' = h(vb_0dc_0k' + uhk') = h(ud + wd) = h(u + w)d$, for some $w \in R$. Thus $d = h(u + w)d$ implies $h(u + w) = 1$ and hence h is invertible. As a result $a - b_0dc_0$ is coprime with a, that is $b_0dc_0 = ta = tdb_0dc_0$, for some $t \in R$. Al last we obtain $td = 1$ and d becomes a unit that contradicts with our assumption. Thus, a is a square-free element.

2 ⇔ 4. The necessity is straightforward as this is a property of each von Neumann regular ring, and the sufficiency follows from the observation that R/aR is an IF-ring (by the Theorem 13) of zero weak global dimension [2].

4 ⇔ 5. The necessity is again obvious, while the sufficiency follows from the fact that the weak global dimension of R/aR can be either 0 or infinite. The theorem is proved. □

Corollary 2. *The square-free elements of a Bezout duo-domain are the elements of almost stable range 1.*

REFERENCES

[1] Bass H. *K-theory and stable algebra*. Publ. Mat. 1964, **22**, 5–60.

[2] Colby R.R. *Rings which have flat injective modules*. J. Algebra 1975, **35** (1–3), 239–252. doi:10.1016/0021-8693(75)90049-6

[3] Garkusha G.A. *FP-injective and weakly quasi-frobenius rings*. Zapiski nauchnych seminarov POMI 1999, **265**, 110–129. (in Russian)

[4] Gatalevych A. *On adequate and generalized adequate duo-rings and elementary divisor duo-rings*. Mat. Stud. 1998, **9**, 115–119.

[5] Kaplansky I. *Elementary divisors and modules*. Trans. Amer. Math. Soc. 1949, **66**, 464–491. doi:10.1090/S0002-9947-1949-0031470-3

[6] Lam T.Y., Dugas A.S. *Quasi-duo rings and stable range descent*. J. Pure Appl. Alg. 2005, **195** (3), 243–259. doi:10.1016/j.jpaa.2004.08.011

[7] Nicholson W.K., Sanchez Campos E. *Rings with the dual of the isomorphism theorem*. J. Algebra 2004, **271** (1), 391–406. doi:10.1016/j.jalgebra.2002.10.001

[8] Nicholson W.K. Yousif M.F. Quasi-Frobenius rings. Cambridge University Press, 2003.

[9] Roitman J. An introduction to homological algebra. Academic Press, 1979.

[10] Stenström B. *Coherent rings and F_P-injective modules*. J. London Math. Soc. 1970, **2**, 323–329.

[11] Tuganbaev A.A. *Elementary divisor rings and distributive rings*. Uspehi. Math. Nauk 1991, **46** (6), 219–220. (in Russian)

[12] Tuganbaev A.A. Rings theory. Arithmetical modules and rings. MTsNMO, Moscow, 2009. (in Russian)

[13] Vasyunyk I.S., Zabavskyi B.V. *Rings of almost unit stable range one.* Ukrainian Math. J. 2011, **63** (6), 977–980. doi:10.1007/s11253-011-0557-1 (translation of Ukrain. Mat. Zh. 2011, **63** (6), 840–843. (in Ukrainian))

[14] Vasserstein L.N. *Stable rank of rings and dimensionality of topological spaces.* Funct. Anal. Appl. 1971, **5** (2), 102–110. doi:10.1007/BF01076414

[15] Yu H.-P. *On quasi-duo rings.* Glasgow Math. J. 1995, **37** (1), 21–31. doi:10.1017/S0017089500030342

[16] Zabavsky B.V., Bilavska S.I. *Every zero adequate ring is an exchange ring.* J. Math. Sci. 2012, **187** (2), 153–156. doi:10.1007/s10958-012-1058-y

[17] Zabavsky B.V. *Diagonal reduction of matrices over finite stable range rings.* Mat. Stud. 2014, **41** (1), 101–108.

[18] Zabavsky B.V. Diagonal reduction of matrices over rings. In: Mathematical Studies, Monograph Series, 16. VNTL Publishers, 2012.

[19] Zabavsky B.V. *Fractionally regular Bezout rings.* Mat. Stud. 2009, **32**, 76–80.

[20] Zabavsky B.V., Bilavska S.I. *Weak global dimension of finite homomorphic images of commutative Bezout domain.* Prykl. Probl. Math. Mech. 2012, **10**, 71–73. (in Ukrainian)

[21] Zabavsky B.V., Komarnytskiy N.Ja. *Distributive elementary divisor domains.* Ukrainian Math. J. 1990, **42** (7), 890–892. doi:10.1007/BF01062100 (translation of Ukrain. Mat. Zh. 1990, **42** (7), 1000–1004. (in Russian))

Received 02.09.2014

Сорокін О.С. *Скінченні гомоморфні образи дуо-областей Безу* // Карпатські матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 360–366.

У статті доведено, що квазі-дуо кільце Безу стабільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли воно є дуо-кільцем. Як застосування цього результату показано, що скінченні гомоморфні образи дуо-областей Безу є когерентними морфійними кільцями слабкої глобальної розмірності рівної 0 або нескінченості, та кожен ін'єктивний модуль є плоский над такими кільцями. Крім того, введене поняття вільного від квадратів елемента у ситуації некомутативного кільця та показано, що такі елементи є адекватними елементами в дуо-областях Безу. Також отримано критерій регулярності скінченних гомоморфних образів дуо-областей Безу в термінах вільних від квадратів елементів, виродженості радикалу Джекобсона та скінченності слабкої глобальної розмірності.

Ключові слова і фрази: кільце Безу, подвійна область визначення, дистрибутивне кільце, стабільність рангу 1, вільно квадратований елемент, адекватний елемент, регулярне кільце фон Неймана, морфічне кільце, слабка глобальна вимірність.

Сорокин А.С. *Конечные гомоморфные образы дуо-областей Безу* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 360–366.

В статье доказано, что квази-дуо кольцо Безу стабильного ранга 1 является кольцом элементарных делителей тогда и только тогда, когда оно является дуо-кольцом. Как применение этого результата показано, что конечные гомоморфные образы дуо-областей Безу являются когерентными морфическими кольцами слабой глобальной размерности равной 0 или бесконечности, и каждый инъективный модуль будет плоским над такими кольцами. Кроме того, введено понятие свободного от квадратов элемента в ситуации некоммутативного кольца, и показано, что такие элементы являются адекватными элементами в дуо-областях Безу. Также получен критерий регулярности конечных гомоморфных образов дуо-областей Безу в терминах свободных от квадратов элементов, вырожденности радикала Джекобсона и конечности слабой глобальной размерности.

Ключевые слова и фразы: кольцо Безу, двойственная область определения, дистрибутивное кольцо, стабильность ранга 1, свободно квадратируемый элемент, адекватный элемент, регулярное кольцо фон Неймана, морфическое кольцо, слабое глобальное измерение.

ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 367–371
doi:10.15330/cmp.6.2.367-371

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.367–371

STEFLUK S.D.

PARTITION POLYNOMIALS DEFINED BY PARAFUNCTIONS OF TRIANGULAR MATRICES WITH ARBITRARY FIRST TWO COLUMNS

We research a wide class of partition polynomials that satisfy paradeterminants of sloping triangular matrix with arbitrary first two columns.

Key words and phrases: partition polynomial, parafunction, paradeterminant, parapermanent.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, 57 Shevchenka str., 76018, Ivano-Frankivsk, Ukraine
E-mail: ljanys_89@mail.ru

INTRODUCTION

Partition polynomials arise in many areas of mathematics: in differentiation of composite functions (Faa di Bruno's formula), in algebra, combinatorics (see [2, p. 1]), number theory [1]. Partition polynomials are studied by many analysts: Beel [3], Riordan [4], Platonov [5], Kuzmyn and Leonova [6,7]. They are usually associated with linear recurrence relations that allow to generate them in an effective way. But for historical reasons the recurrence relations and the corresponding partition polynomials were studied mostly separately. Due to the introduction for triangular matrices in particular their parafunctions it became possible to construct binary relations between parafunctions of triangular matrices, polynomial partitions and linear recurrence relations. Moreover it became possible to apply a unified approach to the study of all partition polynomials, to introduce the concept of inverse partition of polynomials, etc. In [8] a class of partition polynomials that are defined by parafunctions of triangular matrices with arbitrary first column was studied. This paper describes the partition polynomials, that are defined by parafunctions of triangular matrices with any first two columns.

1 PRELIMINARIES AND DENOTATIONS

Let K be a fixed number field.

Definition 1.1. *A triangular table of numbers from some field K*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \tag{1}$$

is called a triangular matrix, and number n — its order.

УДК 517.98
2010 *Mathematics Subject Classification:* 46F15, 47A60, 47D06.

Note that a triangular matrix in the definition is not a matrix in the usual sense, because it is triangular rather than rectangular table of numbers.

Every element a_{ij} of the matrix (1) corresponds with the $(i-j+1)$ elements a_{ik}, $k=j,\dots,i$, which are called *the derived elements* of the matrix generated by the *key element* a_{ij}.

The product of all derived elements generated by the element a_{ij} can be denoted $\{a_{ij}\}$ and called the *factorial product of the key element* a_{ij}, i.e.

$$\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^{i} a_{ik}.$$

Definition 1.2. *If A — is a triangular matrix (1), then the paradeterminant and the parapermanent of the triangular matrix are, respectively, the following numbers:*

$$ddet(A) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=n} (-1)^{n-r} \prod_{s=1}^{r} \{a_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s,\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1}\},$$

$$pper(A) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=n} \prod_{s=1}^{r} \{a_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s,\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1}\},$$

where the summation is made by a set of natural solutions of the equation $\alpha_1+\ldots+\alpha_r=n$.

Theorem 1 ([9]). *For a triangular matrix the following equalities hold:*

$$\left\langle \begin{array}{llll} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right\rangle_n = \left\langle \begin{array}{llll} (a_{11}-a_{21})\cdot a_{22} & & & \\ (a_{11}-a_{31})\cdot a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ (a_{11}-a_{n1})\cdot a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right\rangle_{n-1}, \tag{2}$$

$$\left[\begin{array}{llll} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right]_n = \left[\begin{array}{llll} (a_{11}+a_{21})\cdot a_{22} & & & \\ (a_{11}+a_{31})\cdot a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ (a_{11}+a_{n1})\cdot a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right]_{n-1}. \tag{3}$$

Theorem 2. *Let the polynomials $y_n(x_1,x_2,\dots,x_n), n=0,1,\dots,$ be given by the recurrence equation*

$$y_n = x_1 y_{n-1} - x_2 y_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} x_{n-1} y_1 + (-1)^{n-1} \tau_{n1} x_n y_0, \tag{4}$$

where $y_0=1$, then the following equalities hold:

$$y_n = \mathrm{ddet} \left(\begin{array}{llll} \tau_{11} x_1 & & & \\ \tau_{21}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ \tau_{n1}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \ldots & \frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{array} \right), \tag{5}$$

$$y_n = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tau_{i1} \right) \frac{(k-1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}, \tag{6}$$

where $k=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$.

2 THE MAIN RESULTS

Theorem 3. *Let the polynomials be given by the recurrence equation*

$$y_n = x_1 y_{n-1} - x_2 y_{n-2} + x_3 y_{n-3} - \ldots + (-1)^{n-2} \tau_{n2} x_{n-1} y_1 + (-1)^{n-1} \tau_{n1} \tau_{n2} x_n y_0, \tag{7}$$

where $y_0=1$, then the following equalities hold:

$$y_n = \left\langle \begin{array}{llllll} \tau_{11} x_1 & & & & & \\ \tau_{21}\frac{x_2}{x_1} & \tau_{22} x_1 & & & & \\ \tau_{31}\frac{x_3}{x_2} & \tau_{32}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ \tau_{n-1,1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \tau_{n-1,2}\frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \frac{x_{n-3}}{x_{n-4}} & \cdots & x_1 & \\ \tau_{n1}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \tau_{n2}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \cdots & \frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{array} \right\rangle_n \tag{8}$$

$$y_n = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} \frac{A(\lambda,\tau)}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} x_1^{\lambda_1} \cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}, \tag{9}$$

where

$$A(\lambda,\tau) = \left(\left(\lambda_1(\lambda_1-1)\tau_{11}\tau_{22} + \sum_{i=2}^{n-1} \lambda_1\lambda_i\tau_{11}\tau_{i+1,2} \right) \cdot (k-2)! + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{i+1}\tau_{i+1,1}\tau_{i+1,2} \cdot (k-1)! \right)$$

Proof.

$$y_n = \left\langle \begin{array}{llllll} \tau_{11} x_1 & & & & & \\ \tau_{21}\frac{x_2}{x_1} & \tau_{22} x_1 & & & & \\ \tau_{31}\frac{x_3}{x_2} & \tau_{32}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ \tau_{n-1,1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \tau_{n-1,2}\frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \frac{x_{n-3}}{x_{n-4}} & \cdots & x_1 & \\ \tau_{n1}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \tau_{n2}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \cdots & \frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{array} \right\rangle_n$$

$$= \left\langle \begin{array}{lllll} \left(\tau_{11}x_1 - \tau_{21}\frac{x_2}{x_1}\right)\tau_{22}x_1 & & & & \\ \left(\tau_{11}x_1 - \tau_{31}\frac{x_3}{x_2}\right)\tau_{32}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ \left(\tau_{11}x_1 - \tau_{n-1,1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\right)\tau_{n-1,2}\frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \frac{x_{n-3}}{n-4} & \cdots & x_1 & \\ \left(\tau_{11}x_1 - \tau_{n1}\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)\tau_{n2}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \frac{x_{n-2}}{n-3} & \cdots & \frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{array} \right\rangle_{n-1}$$

$$= \sum_{\lambda_1+\ldots+(n-1)\lambda_{n-1}=n-1} (-1)^{n-1-k} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \left(\tau_{11}x_1 - \tau_{i+1,1}\frac{x_{i+1}}{x_i}\right) \tau_{i+1,2} \frac{(k-1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_{n-1}!} x_1^{\lambda_1} \cdot\ldots\cdot x_{n-1}^{\lambda_{n-1}}$$

$$= \sum_{\lambda_1+\ldots+(n-1)\lambda_{n-1}=n-1} (-1)^{n-1-k} \tau_{11} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \tau_{i+1,2} \frac{(k-1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_{n-1}!} x_1^{\lambda_1+1} \cdot\ldots\cdot x_{n-1}^{\lambda_{n-1}}$$

$$+ \sum_{\lambda_1+\ldots+(n-1)\lambda_{n-1}=n-1} (-1)^{n-k} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \tau_{i+1,1}\tau_{i+1,2} \frac{(k-1)!}{\lambda_1!\ldots\lambda_{n-1}!} x_1^{\lambda_1} \cdot\ldots\cdot x_i^{\lambda_i-1} x_{i+1}^{\lambda_{i+1}+1} \cdot\ldots\cdot x_{n-1}^{\lambda_{n-1}}$$

where $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1}=k$.

The first sum after substituting $\lambda_1+1=\lambda_1',\lambda_2=\lambda_2',\ldots,\lambda_n=\lambda_n'=0$ will have the form

$$\sum_{\lambda_1'+2\lambda_2'+\ldots+n\lambda_n'=n}(-1)^{n-k'}\left((\lambda_1'-1)\tau_{11}\tau_{22}+\tau_{11}\sum_{i=2}^{n-1}\lambda_i'\tau_{i+1,2}\right)\frac{(k'-2)!}{(\lambda_1'-1)!\lambda_2'!\ldots\lambda_n'!}x_1^{\lambda_1'}x_2^{\lambda_2'}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n'}$$

and the second one — after substituting $\lambda_1=\lambda_1',\ldots,\lambda_{i-1}=\lambda_{i-1}',\lambda_i-1=\lambda_i',\lambda_{i+1}+1=\lambda_{i+1}',\lambda_{i+2}=\lambda_{i+2}',\ldots,\lambda_n=\lambda_n'=0$ — will be in the form

$$\sum_{\lambda_1'+\ldots+n\lambda_n'=n}(-1)^{n-k'}\sum_{i=1}^{n-1}\tau_{i+1,1}\tau_{i+1,2}\frac{(k'-1)!}{\lambda_1'!\cdot\ldots\lambda_i'!(\lambda_{i+1}'-1)!\lambda_{i+2}'!\cdot\ldots\lambda_n'!}\cdot x_1^{\lambda_1'}\cdot\ldots\cdot x_i^{\lambda_i'}x_{i+1}^{\lambda_{i+1}'}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n'}.$$

Finally, we note that the expansion of the paradeterminant (8) according to the elements of the last range leads to the recurrence relations (7). $\square$

This theorem can be proved in a similar way.

Theorem 4. *Let the polynomials be given by the recurrence equation*

$$y_n=x_1y_{n-1}+x_2y_{n-2}+x_3y_{n-3}+\ldots+x_{n-2}y_2+\tau_{n2}x_{n-1}y_1+\tau_{n1}\tau_{n2}x_ny_0, \tag{10}$$

where $y_0=1$, and τ_{ij} are some parameters, then the following equalities hold:

$$y_n=\left[\begin{array}{cccccc}\tau_{11}x_1 & & & & & \\ \tau_{21}\frac{x_2}{x_1} & \tau_{22}x_1 & & & & \\ \tau_{31}\frac{x_3}{x_2} & \tau_{32}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ \tau_{n-1,1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \tau_{n-1,2}\frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \frac{x_{n-3}}{x_{n-4}} & \ldots & x_1 & \\ \tau_{n1}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \tau_{n2}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \ldots & \frac{x_2}{x_1} & x_1\end{array}\right]_n \tag{11}$$

$$y_n=\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}A(\lambda,\tau)x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}, \tag{12}$$

where

$$A(\lambda,\tau)=\left(\left(\lambda_1(\lambda_1-1)\tau_{11}\tau_{22}+\sum_{i=2}^{n-1}\lambda_1\lambda_i\tau_{11}\tau_{i+1,2}\right)\frac{(k-2)!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_{i+1}\tau_{i+1,1}\tau_{i+1,2}\cdot\frac{(k-1)!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\right).$$

3 Example

Let's find $A(\lambda,\tau)$ in the partition polynomials (9) for case when $n=15$, $\lambda_1=3$, $\lambda_2=1$, $\lambda_5=2$. In that case $k=6$ and

$$A(\lambda,\tau)=4!\left(3\cdot2\tau_{11}\tau_{22}+\sum_{i=2}^{14}3\lambda_i\tau_{11}\tau_{i+1,2}\right)+5!\left(\sum_{i=1}^{14}\lambda_{i+1}\tau_{i+1,1}\tau_{i+1,2}\right).$$

Thus, the coefficient of $x_1^3x_2x_5^2$ is equal to

$$(-1)^{15-6}A(\lambda,\tau)=\frac{3\cdot2\cdot4!}{3!\cdot1!\cdot2!}a_{11}a_{22}-\frac{3\cdot4!}{3!\cdot1!\cdot2!}a_{11}a_{32}$$
$$-\frac{3\cdot2\cdot4!}{3!\cdot1!\cdot2!}a_{11}a_{62}-\frac{1\cdot5!}{3!\cdot1!\cdot2!}a_{21}a_{22}-\frac{2\cdot5!}{3!\cdot1!\cdot2!}a_{51}a_{52}.$$

References

[1] Fine N.J. *Sums over partitions*. Report of the Institute in the Theory of Numbers 1959, Boulder, 86–94.

[2] Macmahon P.A. Combinatory Analysis. Cambridge Univ. Press, London, 1915.

[3] Bell E.T. *Partition polynomials*. Ann. Math. **29** (1/4), 38–46. doi: 10.2307/1967980

[4] Riordan J. An Introduction to Combinatorical Analysis. Willey, New York, 1958.

[5] Platonov M.L. Combinatorial numbers of mapping class and their applications. Science, Moscow, 1979. (in Russian)

[6] Kuzmyn O.V. *Recurrence relations and enumerative interpretations of some combinatorial numbers and polynomials*. Discrete Math. 1994, **6** (3), 39–49. (in Russian)

[7] Kuzmyn O.V., Leonova O.V. *On polynomials of fragmentation*. Discrete Math. 2001, **13** (2), 144–158. doi: 10.4213/dm283 (in Russian)

[8] R.Zatorsky, S. Stefluk *On one class of partition polynomials*. Algebra Discrete Math. 2013, **16** (1), 127–133.

[9] Ganyushkin O.H., Zatorsky R.A., Lishchynsky I.I. *On paradeterminants and parapermanents*. Bull. Kyiv Univ. Series: Phys. Math. Studies 2005, **1**, 35–41. (in Ukrainian)

Received 17.04.2014

Стефлюк С.Д. *Многочлени розбиттів, що задаються парафункціями трикутних матриць з двома першими довільними стовпцями.* // Карпатські матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — C. 367–371.

Досліджується широкий клас многочленів розбиттів, які задовольняють парадетермінанти трикутної матриці з двома довільними першими стовпцями.

Ключові слова і фрази: многочлени розбиттів, парадетермінант, параперманент, парафункція.

Стефлюк С.Д. *Многочлены разбиений, задаваемые парафункциями треугольных матриц с двумя первыми произвольными столбцами* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — C. 367–371.

Исследуется широкий класс многочленов разбиений, порождающихся парадетерминантами треугольных матриц с двумя первыми произвольными столбцами.

Ключевые слова и фразы: многочлен разбиений, треугольная матрица, парадетерминант, параперманент, парафункция.

ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, 6 (2), 372–376
doi:10.15330/cmp.6.2.372-376

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.372–376

TARAS O., ZAGORODNYUK A.

NOTE ON ARENS REGULARITY OF SYMMETRIC TENSOR PRODUCTS

We investigate symmetric regularity of sums of symmetric tensor products of Banach spaces and Arens regularity of symmetric tensor products of Banach algebras. An example for the Hilbert space is obtained.

Key words and phrases: symmetric regularity, multilinear map, polynomial on Banach space, Arens regularity, tensor product.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, 57 Shevchenka str., 76018, Ivano-Frankivsk, Ukraine
E-mail: `elena_taras@ukr.net` (Taras O.), `azagorodn@pu.if.ua` (Zagorodnyuk A.)

INTRODUCTION

Let X and Y be complex Banach spaces and $B : X \times X \to Y$ be a bilinear map. A map $\widetilde{B} : X^{**} \times X^{**} \to Y^{**}$ is said to be the Aron-Berner extension of B if it is defined by

$$\widetilde{B}(x^{**}, y^{**}) = \lim_{\alpha} B(x_\alpha, y_\beta),$$

where x_α and y_β are nets in X which are weakly-star convergent in X^{**} to x^{**} and y^{**} respectively.

The bilinear map is *regular* if

$$\lim_{\alpha,\beta} B(x_\alpha, y_\beta) = \lim_{\beta,\alpha} B(x_\alpha, y_\beta) \tag{1}$$

for all weakly-star convergent nets $(x_\alpha), (y_\beta) \subset X$ in X^{**}. X is *regular* if each bilinear form on $X \times X$ is regular. X is *symmetricaly regular* if each symmetric bilinear form on X is regular (see [3]). If A is a Banach algebra, then A is called *Arens regular* if the bilinear map associated with the algebra product $(x, y) \to xy$ is regular. In this case the Aron-Berner extension of the algebra product coincides with the Arens extension [1].

In this note we examine Arens regularity of symmetric projective tensor products of Banach algebras.

1 REGULARITY OF SUMS OF SYMMETRIC TENSOR PRODUCTS

Let us denote by $\mathcal{P}(^nX)$ the Banach space of all continuous n-homogeneous polynomials on X. A net $(x_\alpha) \subset X$ is called *n-polynomially convergent* to a functional $\varphi \in \mathcal{P}(^nX)^*$ if

$$\varphi(P) = \lim_{\alpha} P(x_\alpha)$$

for every $P \in \mathcal{P}(^nX)$. (x_α) is *polynomially convergent* if it is n-polynomially convergents for some n.

УДК 517.98
2010 *Mathematics Subject Classification:* 46G25, 46M05.

Theorem 1. *Let (x_α) and (y_β) be polynomially convergent nets such that*

$$\lim_{\alpha,\beta} P(x_\alpha + y_\beta) \neq \lim_{\beta,\alpha} P(x_\alpha + y_\beta)$$

for a polynomial $P \in \mathcal{P}(^nX)$. Then the Banach space

$$\sum^n X := \mathbb{C} \oplus X \oplus X \otimes_{s,\pi} X \oplus \ldots \oplus \overbrace{X \otimes_{s,\pi} \ldots \otimes_{s,\pi} X}^{n}$$

is not symmetrically regular, where the symbol $\otimes_{s,\pi}$ denotes the complete symmetric projective tensor product.

Proof. Let A_P be the symmetric n-linear map associated with P. That is, $A_P(x, \ldots, x) = P(x)$. Let us define a bilinear map B_P on $\sum^n X$ by the following way: given $w, u \in \sum^n X$ can be represented by $w = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$, $u = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$, where

$$w_0, u_0 \in \mathbb{C}, \qquad w_k, u_k \in \otimes^k_{s,\pi} X = \overbrace{X \otimes_{s,\pi} \ldots \otimes_{s,\pi} X}^{k},$$

and $w_1 = x_1 \in X$, $u_1 = y_1 \in Y$,

$$w_k = \sum_{j=1}^{\infty} x_{kj}^{\otimes k} = \sum_{j=1}^{\infty} x_{kj} \otimes \ldots \otimes x_{kj}, \qquad u_k = \sum_{j=1}^{\infty} y_{kj}^{\otimes k} = \sum_{j=1}^{\infty} y_{kj} \otimes \ldots \otimes y_{kj}.$$

Then we set

$$B_P(w, u) = \sum_{j_1,\ldots,j_n} A_P(u_0 x_{nj_1}, \ldots, u_0 x_{nj_n}) + \sum_{j_2,\ldots,j_n} n A_P(y_1, x_{(n-1)j_2}, \ldots, x_{(n-1)j_n}) + \ldots$$
$$+ \binom{n}{k} \sum_{j_1,\ldots,j_n} A_P(y_{j_1}, \ldots, y_{j_k}, x_{j_{k+1}}, \ldots, x_{j_n}) + \sum_{j_1,\ldots,j_n} A_P(w_0 y_{nj_1}, \ldots, w_0 y_{nj_n}).$$

Clearly that B_P is a continuous symmetric bilinear form on $\sum^n X$ and

$$B_P(1 + x + \ldots x^{\otimes x}, 1 + y + \ldots y^{\otimes n}) = P(x + y).$$

Let ν be the 'canonical' embedding $\nu(x) = 1 + x + \ldots + x^{\otimes n}$, x_α and y_β be n- polynomially convergent nets. Then $\nu(x_\alpha)$ and $\nu(y_\alpha)$ are weakly-star convergent in $(\sum^n X)^{**}$. Hence

$$\lim_{\alpha,\beta} B_P(\nu(x_\alpha), \nu(y_\beta)) \neq \lim_{\beta,\alpha} B_P(\nu(x_\alpha), \nu(y_\beta))$$

and so B_P is not regular. Thus $\sum^n X$ is not symmetrically regular. □

For a given $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ in ℓ_1 the *support* of x is the subset $\operatorname{supp}\ x = \{m \in \mathbb{N} : x_m \neq 0\}$. Here $\{e_n\}$ is the standart basis of ℓ_1.

Proposition 1. *There exists a symmetric bilinear map $B : \ell_1 \times \ell_1 \to \mathbb{C}$ and there are nets $(x_\alpha) \subset \ell_1$ and $(y_\beta) \subset \ell_1$ such that $||x_\alpha|| = ||y_\beta|| = 1$ and*

1) $\lim_{\alpha,\beta} B(x_\alpha, y_\beta) \neq \lim_{\beta,\alpha} B(x_\alpha, y_\beta)$,

2) $\operatorname{supp}\ x_\alpha \cap \operatorname{supp}\ y_\beta = \varnothing$ *for all* α and β.

Proof. 1) it follows from the fact that ℓ_1 is not symmetrically regular. To construct map B which satisfy both 1) and 2) conditions we will use Example 1.1 in [5]. For simplicity we consider $\ell_1(\mathbb{Z})$. Let L_+ and L_- are in $\ell_1(\mathbb{Z})^{**}$ such that L_+ is a Hahn-Banach extension of functional

$$\varphi_+(x) = \lim_{n\to+\infty} x_n,$$

$x_n \in c(\mathbb{Z})$ and L_- is a Hahn-Banach extension of

$$\varphi_-(x) = \lim_{n\to-\infty} x_n.$$

Clearly L_+ may by approximated in weak-star topology by (x_α), $x_\alpha \in \ell_1$, $||x|| = 1$, $\alpha > 0$ and L_- by y_β, $||y_\beta|| = 1$, $\beta < 0$. Also in [5] it is shown that the Arens extension of the convolution $*$ on ℓ_1 is not commutative and

$$\lim_{\alpha,\beta}(x_\alpha * y_\beta) \neq \lim_{\beta,\alpha}(x_\alpha * y_\beta).$$

So there is a linear functional f on $\ell_1(\mathbb{Z})^{**}$ such that

$$\lim_{\alpha,\beta} f(x_\alpha * y_\beta) \neq \lim_{\beta,\alpha} f(x_\alpha * y_\beta).$$

We set $B(x,y) = f(x * y)$. □

Proposition 2. *There exists a 4-homogeneous polynomial P on ℓ_2 such that*

$$\lim_{\alpha,\beta} P(x_\alpha + y_\beta) \neq \lim_{\beta,\alpha} P(x_\alpha + y_\beta)$$

for some polynomially convergent nets $(x_\alpha), (y_\beta) \subset \ell_2$.

Let $B(x,y)$ be a symmetric non-regular bilinear map on ℓ_1 and (x_α) and (y_β) as in Proposition 1. We can write

$$x_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\alpha,n} e_n \qquad \text{and} \qquad y_\beta = \sum_{n=1}^{\infty} y_{\beta,n} e_n,$$

where e_n is the standart basis on ℓ_2 of the form $z_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_{\alpha,n}} e_n$ and $r_\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{y_{\beta,n}} e_n$. Clearly $||z_\alpha||_{\ell_2} = ||x_\alpha||_{\ell_1} = 1$ and $||r_\beta||_{\ell_2} = ||y_\beta||_{\ell_1} = 1$. By compactness reasons nets (z_α) and (r_β) contains H_b-convergent subsets (which are polynomially convergent as well) which we will denote by the same symbols ([2]). Let us define the following polynomial on ℓ_2

$$P(x) = B\Big(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 e_n, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 e_n\Big),$$

where B is defined above. Since

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 e_n \in \ell_1 \qquad \text{for every} \qquad x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in \ell_2,$$

P is well defined. Since nets (x_α) and (y_β) have the disjoint supports,

$$\begin{aligned} P(z_\alpha + r_\beta) &= B\Big(\sum_{n=1}^{\infty} z_{\alpha,n}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} r_{\beta,n}^2, \sum_{n=1}^{\infty} z_{\alpha,n}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} r_{\beta,n}^2\Big) \\ &= B(x_\alpha + y_\beta, x_\alpha + y_\beta) = B(x_\alpha, x_\alpha) + 2B(x_\alpha, y_\beta) + B(y_\beta, y_\beta). \end{aligned}$$

So,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha,\beta} P(z_\alpha + r_\beta) &= \lim_{\alpha} B(x_\alpha, x_\alpha) + \lim_{\beta} B(y_\beta, y_\beta) + 2\lim_{\alpha,\beta} B(x_\alpha, y_\beta) \\ &\neq \lim_{\alpha} B(x_\alpha, x_\alpha) + \lim_{\beta} B(y_\beta, y_\beta) + 2\lim_{\beta,\alpha} B(x_\alpha, y_\beta) = \lim_{\beta,\alpha} P(z_\alpha + r_\beta). \end{aligned}$$

Corollary. *$\sum^4 \ell_2$ is not symmetrically regular. Note that in [3] it is shown that the complete projective tensor product $\ell_2 \otimes_\pi \ell_2$ is not symmetrically regular.*

2 THE CASE OF BANACH ALGEBRA

Let A be a Banach algebra. Then the complete projective tensor power $\bigotimes_\pi^n A$ is a Banach algebra too and the symmetric tensor power $\bigotimes_{s,\pi}^n A$ is a Banach subalgebra of $\bigotimes_\pi^n A$. In [4] was studied conditions of Arens regularity of $\bigotimes_\pi^n A$. Here we concentrate on $\bigotimes_{s,\pi}^n A$.

Theorem 2. *Let (x_α), (y_β) be an n-polynomial convergent nets in A such that*

$$\lim_{\alpha,\beta} P(x_\alpha \cdot y_\beta) \neq \lim_{\beta,\alpha} P(x_\alpha \cdot y_\beta) \tag{2}$$

for an arbitrary $P \in \mathcal{P}(^n A)$. Then $\bigotimes_{s,\pi}^n A$ is not regular.

Proof. If $(x_\alpha), (y_\beta) \subset A$ are n-polynomial convergent nets to $\varphi, \psi \in (\mathcal{P}(^n A))^*$ respectively, then nets $u_\alpha = x_\alpha \otimes \ldots \otimes x_\alpha$, $v_\beta = y_\beta \otimes \ldots \otimes y_\beta$ are convergent in week-star topology to $\widehat{\varphi}, \widehat{\psi} \in (\bigotimes_{s,\pi}^n A)^{**}$ respectively, i.e. for all $f \in (\bigotimes_{s,\pi}^n A)^*$

$$\widehat{\varphi}(f) = \lim_{\alpha} f(u_\alpha), \qquad \widehat{\psi}(f) = \lim_{\beta} f(v_\beta).$$

Let A_P be a symmetric n-linear map associated with P and f is the linear functional on $\bigotimes_{s,\pi}^n A$ such that $P(x) = f(x \otimes \ldots \otimes x)$.

Let us consider $P(x \cdot y)$ for arbitrary $P \in \mathcal{P}(^n A)$:

$$P(x \cdot y) = A_P(\underbrace{x\cdot y, \ldots, x \cdot y}_{n}) = f(\underbrace{x \cdot y \otimes \ldots \otimes x \cdot y}_{n}) = f(u \cdot v) = B(u,v),$$

where $u = \underbrace{x \otimes \ldots \otimes x}_{n}$, $v = \underbrace{y \otimes \ldots \otimes y}_{n}$ and

$$u \cdot v = \frac{\overbrace{\underbrace{x \cdot y \otimes \ldots \otimes x \cdot y}_{n} + \ldots + \underbrace{x \cdot y \otimes \ldots \otimes x \cdot y}_{n}}^{n}}{n} = \underbrace{x \cdot y \otimes \ldots \otimes x \cdot y}_{n}.$$

So, if

$$\lim_{\alpha,\beta} P(x_\alpha \cdot y_\beta) \neq \lim_{\beta,\alpha} P(x_\alpha \cdot y_\beta),$$

then

$$\lim_{\alpha,\beta} B(u_\alpha, v_\beta) \neq \lim_{\beta,\alpha} B(u_\alpha, v_\beta).$$

Thus B is a bilinear map on $\bigotimes_{s,\pi}^n A$ and is not regular. □

Remark. *In the case of commutative Banach algebra we can see that under conditions of Theorem 2, $\bigotimes_{s,\pi}^n A$ is not symmetrically regular.*

REFERENCES

[1] Arens R. *The adjoint of a bilinear operation.* Proc. Amer. Math. Soc. 1951, **2** (6), 839–848. doi:10.1090/S0002-9939-1951-0045941-1

[2] Aron R.M., Cole B.J., Gamelin T.W. *Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space.* J. Reine Angew. Math. 1991, **415**, 51–93.

[3] Aron R.M., Galindo P., Garcia D., Maestre M. *Regularity and algebras of analytic functions in infinite dimensions.* Trans. Amer. Math. Soc. 1996, **348** (2), 543–559. doi:10.1090/S0002-9947-96-01553-X

[4] Ulger A. *Arens regularity of the algebra $A\hat{\otimes}B$.* Trans. Amer. Math. Soc. 1988, **305** (2), 623–639. doi:10.1090/S0002-9947-1988-0924772-1

[5] Zalduendo I. *A canonical extension for analytic functions on Banach spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. 1990, **320** (2), 747–763. doi:10.1090/S0002-9947-1990-1001952-X

Received 07.07.2014

Тарас О., Загороднюк А. *Регулярність за Аренсом симетричних тензорних добутків* // Карпатські матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — C. 372–376.

У роботі досліджено симетричну регулярність сум симетричних тензорних добутків банахових просторів і регулярність за Аренсом симетричних тензорних добутків банахових алгебр. Розглянуто приклад для випадку гільбертового простору.

Ключові слова і фрази: симетрична регулярність, мультилінійне відображення, поліном на банаховому просторі, регулярність за Аренсом, тензорний добуток.

Тарас Е., Загороднюк А. *Регулярность по Аренсу симметрических тензорных произведений* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — C. 372–376.

В работе исследуется симметрическая регулярность сумм симметрических тензорных произведений банаховых пространств и регулярность по Аренсу симметрических тензорных произведений банаховых алгебр. Рассмотрен пример для случая гильбертового пространства.

Ключевые слова и фразы: симметрическая регулярность, мультилинейное отображение, полином на банаховом пространстве, регулярность по Аренсу, тензорное произведение.

ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 377–388
doi:10.15330/cmp.6.2.377-388

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.377–388

TIMIŞ I.

STABILITY OF TRIPLED FIXED POINT ITERATION PROCEDURES FOR MIXED MONOTONE MAPPINGS

Recently, Berinde and Borcut [11] introduced the concept of tripled fixed point and by now, there are several researches on this subject, in partially ordered metric spaces and in cone metric spaces.

In this paper we introduce the notion of stability definition of tripled fixed point iteration procedures and establish stability results for mixed monotone mappings which satisfy various contractive conditions. Our results extend and complete some existing results in the literature. An illustrative example is also given.

Key words and phrases: tripled fixed point, stability, mixed monotone operator, contractive condition.

Technical University of Cluj-Napoca, North University Center of Baia Mare, 62A Victor Babes str., 430083, Baia-Mare, Romania
E-mail: ioana.daraban@yahoo.com

INTRODUCTION

Banach-Caccioppoli-Picard Principle was applied on partially ordered complete metric spaces by Ran and Reueings [34] and starting from their results, Bhaskar and Laksmikantham [12] extend this theory to partially ordered produced metric spaces and introduce the concept of coupled fixed point for mixed-monotone operators of Picard type, obtaining results involving the existence, the existence and the uniqueness of the coincidence points for mixed-monotone operators $T : X^2 \to X$ in the presence of a contraction type condition.

This concept of coupled fixed points in partially ordered metric and cone metric spaces have been studied by several authors, including Abbas, Ali Khan and Radenovic [1], Berinde [5–7], Choudhury and Kundu [17], Ciric and Lakshmikantham [18], Karapinar [23], Lakshmikantham and Ciric [24], Olatinwo [25], Sabetghadam, Masiha and Sanatpour [37].

Recently, Berinde and Borcut [11, 16] obtained extensions to the concept of tripled fixed points and tripled coincidence fixed points and also obtained tripled fixed points theorems and tripled coincidence fixed points theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces. Research on tripled fixed point was continued by Abbas, Aydi and Karapinar [2], Aydi and Karapinar [4], Amini-Harandi [3], Borcut [13–15], Rao and Kishore [34].

In the case of fixed points of an operator $T : X^2 \to X$, the stability of a fixed point iterative procedures was first studied by Ostrowski [33] in the case of Banach contraction mappings and this subject was later developed for certain contractive definitions by several authors (see Harder and Hicks [19], Rhoades [35,36], Osilike [30,31], Osilike and Udomene [32], Berinde [8–

УДК 515.12
2010 *Mathematics Subject Classification:* 54H25, 47H10.

10], Jachymski [22], Olatinwo [26,27], Imoru and Olatinwo [20], Imoru, Olatinwo and Owojori [21,29] etc.).

On the other hand, adapting the concept of stability from fixed point iterative procedures, Olatinwo [28] studied the stability of the coupled fixed point iterative procedures using some contractive conditions for which the existence of a unique coupled fixed point has been established by Sabetghadam, Masiha and Sanatpour [37].

Our aim in this paper is to introduce the concept of stability for tripled fixed point iterative procedures and to establish stability results for mixed monotone mappings satisfying various contractive conditions by extension from coupled fixed points to tripled fixed points of contractive conditions employed by Olatinwo [28].

1 Preliminaries

Let $(X,\leq)$ be a partially ordered set and d be a metric on X such that (X,d) is a complete metric space. Berinde and Borcut [11] endowed the product space X^3 with the following partial order

$$(u,v,w)\leq(x,y,z) \iff x\geq u,\ y\leq v,\ z\geq w, \qquad (u,v,w),(x,y,z)\in X^3.$$

Definition 1 ([11]). *Let $(X,\leq)$ be a partially ordered set and $T: X^3\to X$ be a mapping. We say that T has the mixed monotone property if $T(x,y,z)$ is monotone nondecreasing in x, monotone nonincreasing in y and monotone nondecreasing in z, that is, for any $x,y,z\in X$,*

$$\begin{aligned} x_1\leq x_2 &\implies T(x_1,y,z)\leq T(x_2,y,z), && x_1,x_2\in X,\\ y_1\leq y_2 &\implies T(x,y_1,z)\geq T(x,y_2,z), && y_1,y_2\in X,\\ z_1\leq z_2 &\implies T(x,y,z_1)\leq T(x,y,z_2), && z_1,z_2\in X. \end{aligned}$$

Definition 2 ([11]). *An element $(x,y,z)\in X^3$ is called tripled fixed point of $T: X^3\to X$, if*

$$T(x,y,z)=x,\quad T(y,x,y)=y,\quad T(z,y,x)=z.$$

A mapping $T: X^3\to X$ is said to be a (k,μ,ρ)-contraction if and only if there exists three constants $k\geq 0$, $\mu\geq 0$, $\rho\geq 0$, $k+\mu+\rho<1$, such that $\forall x,y,z,u,v,w\in X$,

$$d(T(x,y,z),T(u,v,w))\leq kd(x,u)+\mu d(y,v)+\rho d(z,w). \tag{1}$$

In relation to (1), we introduce some new contractive conditions.

Let (X,d) be a metric space. For a map $T: X^3\to X$ there exist $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3\geq 0$, with $a_1+a_2+a_3<1$, $b_1+b_2+b_3<1$, such that $\forall x,y,z,u,v,w\in X$ we introduce the following definitions of contractive conditions:

$$(i)\ d(T(x,y,z),T(u,v,w))\leq a_1 d(T(x,y,z),x)+b_1 d(T(u,v,w),u); \tag{2}$$
$$d(T(y,x,y),T(v,u,v))\leq a_2 d(T(y,x,y),y)+b_2 d(T(v,u,v),v); \tag{3}$$
$$d(T(w,y,x),T(z,v,u))\leq a_3 d(T(z,y,x),z)+b_3 d(T(w,v,u),w); \tag{4}$$
$$(ii)\ d(T(x,y,z),T(u,v,w))\leq a_1 d(T(x,y,z),u)+b_1 d(T(u,v,w),x); \tag{5}$$
$$d(T(y,x,y),T(v,u,v))\leq a_2 d(T(y,x,y),v)+b_2 d(T(v,u,v),y); \tag{6}$$
$$d(T(w,y,x),T(z,v,u))\leq a_3 d(T(z,y,x),w)+b_3 d(T(w,v,u),z). \tag{7}$$

Let $A,B\in M_{(m,n)}(\mathbb{R})$ be two matrices. We write $A\leq B$, if $a_{ij}\leq b_{ij}$ for all $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

In order to prove our main stability result in this paper we give the next

Lemma 1 ([8]). *Let $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ be sequences of nonnegative numbers and h be a constant, such that $0\leq h<1$ and*

$$a_{n+1}\leq ha_n+b_n,\quad n\geq 0.$$

If $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$, then $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

We also give the next result which extends Lemma 1 to vector sequences, where inequalities between vectors means inequality on its elements.

Lemma 2. *Let $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ be sequences of nonnegative real numbers. Consider a matrix $A\in M_{3,3}(\mathbb{R})$ with nonnegative elements, such that*

$$\begin{pmatrix} u_{n+1}\\ v_{n+1}\\ w_{n+1}\end{pmatrix}\leq A\cdot\begin{pmatrix} u_n\\ v_n\\ w_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\varepsilon_n\\ \delta_n\\ \gamma_n\end{pmatrix},\qquad n\geq 0, \tag{8}$$

with

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} A^n=O_3$;

(ii) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k<\infty$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\delta_k<\infty$ *and* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\gamma_k<\infty$.

If $\lim\limits_{n\to\infty}\begin{pmatrix}\varepsilon_n\\ \delta_n\\ \gamma_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, *then* $\lim\limits_{n\to\infty}\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\\ w_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Proof. For $A=0\in M_{(3,3)}$, the conclusion is obvious.

We rewrite (8) with $n=k$ and sum the inequalities obtained for $k=0,1,2,\dots,n$. After doing all cancellations, we obtain

$$\begin{pmatrix} u_{n+1}\\ v_{n+1}\\ w_{n+1}\end{pmatrix}\leq A^{n+1}\begin{pmatrix} u_0\\ v_0\\ w_0\end{pmatrix}+\sum_{k=0}^{n}A^k\begin{pmatrix}\varepsilon_{n-k}\\ \delta_{n-k}\\ \gamma_{n-k}\end{pmatrix}. \tag{9}$$

From (ii) it follows that the sequences of partial sums $\{E_n\}$, $\{\Delta_n\}$ and $\{\Gamma_n\}$, given respectively by $E_n=\varepsilon_0+\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n$, $\Delta_n=\delta_0+\delta_1+\cdots+\delta_n$ and $\Gamma_n=\gamma_0+\gamma_1+\cdots+\gamma_n$, for $n\geq 0$, converge respectively to some $E\geq 0$, $\Delta\geq 0$ and $\Gamma\geq 0$ and hence, they are bounded.

Let $M>0$ be such that $\begin{pmatrix}E_n\\ \Delta_n\\ \Gamma_n\end{pmatrix}\leq M\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\forall n\geq 0$. By (i) we have that $\forall e>0$, there exists $N=N(e)$ such that $A^n\leq\frac{e}{2M}\cdot I_3$, $\forall\, n\geq N$, $M>0$.

We can write

$$\sum_{k=0}^{n}A^k\begin{pmatrix}\varepsilon_{n-k}\\ \delta_{n-k}\\ \gamma_{n-k}\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}\varepsilon_0\\ \delta_0\\ \gamma_0\end{pmatrix}+\cdots+A^N\begin{pmatrix}\varepsilon_{n-N}\\ \delta_{n-N}\\ \gamma_{n-N}\end{pmatrix}$$
$$+A^{N-1}\begin{pmatrix}\varepsilon_{n-N+1}\\ \delta_{n-N+1}\\ \gamma_{n-N+1}\end{pmatrix}+\cdots+I_3\begin{pmatrix}\varepsilon_n\\ \delta_n\\ \gamma_n\end{pmatrix}.$$

But

$$A^n \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \delta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} + \cdots + A^N \begin{pmatrix} \varepsilon_{n-N} \\ \delta_{n-N} \\ \gamma_{n-N} \end{pmatrix} \le \frac{e}{2M} \cdot I_3 \left[\begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \delta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \varepsilon_{n-N} \\ \delta_{n-N} \\ \gamma_{n-N} \end{pmatrix} \right]$$
$$= \frac{e}{2M} \cdot I_3 \begin{pmatrix} E_{n-N} \\ \Delta_{n-N} \\ \Gamma_{n-N} \end{pmatrix} \le \frac{e}{2M} \cdot I_3 \cdot M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{e}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

for all $n \ge N$. On the other hand, if we denote $A' = \max\{I_3, A, \dots, A^{N-1}\}$, we obtain

$$A^{N-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_{n-N+1} \\ \delta_{n-N+1} \\ \gamma_{n-N+1} \end{pmatrix} + \cdots + I_3 \begin{pmatrix} \varepsilon_n \\ \delta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} \le A' \left[\begin{pmatrix} \varepsilon_{n-N+1} \\ \delta_{n-N+1} \\ \gamma_{n-N+1} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \varepsilon_n \\ \delta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} \right]$$
$$= A' \begin{pmatrix} E_n - E_{n-N} \\ \Delta_n - \Delta_{n-N} \\ \Gamma_n - \Gamma_{n-N} \end{pmatrix}.$$

As N is fixed, then $\lim_{n\to\infty} E_n = \lim_{n\to\infty} E_{n-N} = E$, $\lim_{n\to\infty} \Delta_n = \lim_{n\to\infty} \Delta_{n-N} = \Delta$, and $\lim_{n\to\infty} \Gamma_n = \lim_{n\to\infty} \Gamma_{n-N} = \Gamma$, which shows that there exists a positive integer k such that

$$A' \begin{pmatrix} E_n - E_{n-N} \\ \Delta_n - \Delta_{n-N} \\ \Gamma_n - \Gamma_{n-N} \end{pmatrix} < \frac{e}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \forall n \ge k.$$

Now, for $m = \max\{k, N\}$, we get

$$A^n \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \delta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} + \cdots + I_3 \begin{pmatrix} \varepsilon_n \\ \delta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} < e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \forall n \ge m,$$

and therefore, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} A^k \begin{pmatrix} \varepsilon_{n-k} \\ \delta_{n-k} \\ \gamma_{n-k} \end{pmatrix} = 0.$

Now, by letting the limit in (9), as $\lim_{n\to\infty} A^n = 0$, we get

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

as required. □

2 Stability results

Let (X, d) be a metric space and $T : X^3 \to X$ a mapping. For $(x_0, y_0, z_0) \in X^3$ the sequence $\{(x_n, y_n, z_n)\} \subset X^3$ defined by

$$x_{n+1} = T(x_n, y_n, z_n), \quad y_{n+1} = T(y_n, x_n, y_n), \quad z_{n+1} = T(z_n, y_n, x_n), \tag{10}$$

with $n = 0, 1, 2, \dots$, is said to be a *tripled fixed point iterative procedure*.

We give the following definition of stability with respect to T, in metric spaces, relative to tripled fixed points iterative procedures.

Definition 3. *Let (X, d) be a complete metric space and*

$$Fix_t(T) = \left\{(x^*, y^*, z^*) \in X^3 \mid T(x^*, y^*, z^*) = x^*,\ T(y^*, x^*, y^*) = y^*, T(z^*, y^*, x^*) = z^*\right\}$$

is the set of tripled fixed points of T.

Let $\{(x_n, y_n, z_n)\} \subset X^3$ be the sequence generated by the iterative procedure defined by (10), where $(x_0, y_0, z_0) \in X^3$ is the initial value, which converges to a tripled fixed point (x^*, y^*, z^*) of T.

Let $\{(u_n, v_n, w_n)\} \subset X^3$ be an arbitrary sequence. For all $n = 0, 1, 2, \dots$ we set

$$\varepsilon_n = d\left(u_{n+1}, T\left(u_n, v_n, w_n\right)\right), \quad \delta_n = d\left(v_{n+1}, T\left(v_n, u_n, v_n\right)\right), \quad \gamma_n = d\left(w_{n+1}, T\left(w_n, v_n, u_n\right)\right).$$

Then the tripled fixed point iterative procedure defined by (10) is T-stable or stable with respect to T, if and only if

$$\lim_{n\to\infty} (\varepsilon_n, \delta_n, \gamma_n) = 0_{\mathbb{R}^3} \quad \text{implies that} \quad \lim_{n\to\infty} (u_n, v_n, w_n) = (x^*, y^*, z^*).$$

Theorem 1. *Let $(X, \le)$ be a partially ordered set. Suppose that there exists a metric d on X such that (X, d) is a complete metric space. Let $T : X^3 \to X$ be a continuous mapping having the mixed monotone property on X and satisfying (1).*

If there exists $x_0, y_0, z_0 \in X$ such that

$$x_0 \le T(x_0, y_0, z_0), \quad y_0 \ge T(y_0, x_0, y_0) \quad \text{and} \quad z_0 \le T(z_0, y_0, x_0),$$

then there exist $x^*, y^*, z^* \in X$ such that

$$x^* = T(x^*, y^*, z^*), \quad y^* = T(y^*, x^*, y^*) \quad \text{and} \quad z^* = T(z^*, y^*, x^*).$$

Assume that for every $(x, y, z), (x_1, y_1, z_1) \in X^3$, there exists $(u, v, w) \in X^3$ that is comparable to (x, y, z) and (x_1, y_1, z_1). For $(x_0, y_0, z_0) \in X^3$, let $\{(x_n, y_n, z_n)\} \subset X^3$ be the tripled fixed point iterative procedure defined by (10)*. Then the tripled fixed point iterative procedure is stable with respect to T.*

Proof. From the suppositions of the hypothesis, Berinde and Borcut [11] proved the existence and uniqueness of the tripled fixed point and now, using these results, we can study the stability of the tripled fixed point iterative procedures.

Let $\{(x_n, y_n, z_n)\} \subset X^3$, $\varepsilon_n = d\left(u_{n+1}, T\left(u_n, v_n, w_n\right)\right)$, $\delta_n = d\left(v_{n+1}, T\left(v_n, u_n, v_n\right)\right)$ and $\gamma_n = d\left(w_{n+1}, T\left(w_n, v_n, u_n\right)\right)$.

Assume also that $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = \lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$ in order to establish that $\lim_{n\to\infty} u_n = x^*$, $\lim_{n\to\infty} v_n = y^*$ and $\lim_{n\to\infty} w_n = z^*$.

Therefore, using the (k, μ, ρ)-contraction condition (1), we obtain

$$\begin{aligned} d(u_{n+1}, x^*) &\le d(u_{n+1}, T\left(u_n, v_n, w_n\right)) + d(T\left(u_n, v_n, w_n\right), x^*) \\ &= d(T\left(u_n, v_n, w_n\right), T(x^*, y^*, z^*)) + \varepsilon_n \\ &\le kd(u_n, x^*) + \mu d(v_n, y^*) + \rho d(w_n, z^*) + \varepsilon_n, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} d(v_{n+1}, y^*) &\le d(v_{n+1}, T\left(v_n, u_n, v_n\right)) + d(T\left(v_n, u_n, v_n\right), y^*) \\ &= d(T\left(v_n, u_n, v_n\right), T(y^*, x^*, y^*)) + \delta_n \\ &\le kd(v_n, y^*) + \mu d(u_n, x^*) + \rho d(v_n, y^*) + \delta_n, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} d(w_{n+1},z^*) &\leq d(w_{n+1},T(w_n,v_n,u_n))+d(T(w_n,v_n,u_n),z^*) \\ &= d(T(w_n,v_n,u_n),T(z^*,y^*,x^*))+\gamma_n \\ &\leq kd(w_n,z^*)+\mu d(v_n,y^*)+\rho d(u_n,x^*)+\gamma_n. \end{aligned} \tag{13}$$

From (11), (12) and (13), we obtain

$$\begin{pmatrix} d(u_{n+1},x^*) \\ d(v_{n+1},y^*) \\ d(w_{n+1},z^*) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} k & \mu & \rho \\ \mu & k+\rho & 0 \\ \rho & \mu & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d(u_n,x^*) \\ d(v_n,y^*) \\ d(w_n,z^*) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_n \\ \delta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

We denote $A := \begin{pmatrix} k & \mu & \rho \\ \mu & k+\rho & 0 \\ \rho & \mu & k \end{pmatrix}$, where $0 \leq k+\mu+\rho < 1$, as in (1).

In order to apply Lemma 2, we need that $A^n \to 0$, as $n \to \infty$. Simplifying the writing, $A := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & b_1 & h_1 \end{pmatrix}$, where $a_1+b_1+c_1 = d_1+e_1+f_1 = g_1+b_1+h_1 = k+\mu+\rho < 1$.

Then

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} k & \mu & \rho \\ \mu & k+\rho & 0 \\ \rho & \mu & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & \mu & \rho \\ \mu & k+\rho & 0 \\ \rho & \mu & k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k^2+\mu^2+\rho^2 & 2k\mu+2\mu\rho & 2k\rho \\ 2k\mu+\rho\mu & k^2+\mu^2+\rho^2+2k\rho & \mu\rho \\ 2k\rho+\mu^2 & 2k\mu+2\rho\mu & k^2+\rho^2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & b_2 & h_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

where $a_2+b_2+c_2 = d_2+e_2+f_2 = g_2+b_2+h_2 = (k+\mu+\rho)^2 < k+\mu+\rho < 1$.

Now, we prove by induction that

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & b_n & h_n \end{pmatrix},$$

where

$$a_n+b_n+c_n = d_n+e_n+f_n = g_n+b_n+h_n = (k+\mu+\rho)^n < k+\mu+\rho < 1. \tag{14}$$

If we assume that (14) is true for n, then since

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & b_n & h_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & \mu & \rho \\ \mu & k+\rho & 0 \\ \rho & \mu & k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ka_n+\mu b_n+\rho c_n & \mu a_n+kb_n+\rho b_n+\mu c_n & \rho a_n+kc_n \\ kd_n+\mu e_n+\rho f_n & \mu d_n+ke_n+\rho e_n+\mu f_n & \rho d_n+kf_n \\ kg_n+\mu b_n+\rho h_n & \mu g_n+kb_n+\rho b_n+\mu h_n & \rho g_n+kh_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

we have

$$\begin{aligned} a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1} &= ka_n+\mu b_n+\rho c_n+\mu a_n+kb_n+\rho b_n+\mu c_n+\rho a_n+kc_n \\ &= (k+\mu+\rho)a_n+(k+\mu+\rho)b_n+(k+\mu+\rho)c_n \\ &= (k+\mu+\rho)(a_n+b_n+c_n) = (k+\mu+\rho)(k+\mu+\rho)^n \\ &= (k+\mu+\rho)^{n+1} < k+\mu+\rho < 1. \end{aligned}$$

Similarly, we obtain

$$d_{n+1}+e_{n+1}+f_{n+1} = g_{n+1}+b_{n+1}+h_{n+1} = (k+\mu+\rho)^{n+1} < k+\mu+\rho < 1.$$

Therefore, $\lim_{n\to\infty} A^n = O_3$ and now, having satisfied the conditions of the hypothesis of Lemma 2, we can apply it and we get

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix},$$

so the tripled fixed point iteration procedure defined by (10) is T-stable. □

Remark 1. *Theorem 1 completes the existence theorem of tripled fixed points of Berinde and Borcut [11] with the stability result for the tripled fixed point iterative procedures, using mixed-monotone operators.*

Corollary 1. *Let $(X,\leq)$ be a partially ordered set. Suppose that there exists a metric d on X such that (X,d) is a complete metric space. Let $T: X^3 \to X$ be a continuous mapping having the mixed monotone property on X.*

There exists $\kappa \in [0,1)$, such that T satisfies the following contraction condition

$$d(T(x,y,z),T(u,v,w)) \leq \frac{\kappa}{3}\left[d(x,u)+d(y,v)+d(z,w)\right], \tag{15}$$

for each $x,y,z,u,v,w \in X$, with $x \geq u$, $y \leq v$ and $z \geq w$.

If there exists $x_0, y_0, z_0 \in X$ such that

$$x_0 \leq T(x_0,y_0,z_0), \quad y_0 \geq T(y_0,x_0,y_0) \quad \text{and} \quad z_0 \leq T(z_0,y_0,x_0),$$

then there exist $x^*, y^*, z^* \in X$ such that

$$x^* = T(x^*,y^*,z^*), \quad y^* = T(y^*,x^*,y^*) \quad \text{and} \quad z^* = T(z^*,y^*,x^*).$$

Assume that for every (x,y,z), $(x_1,y_1,z_1) \in X^3$, there exists $(u,v,w) \in X^3$ that is comparable to (x,y,z) and (x_1,y_1,z_1). For $(x_0,y_0,z_0) \in X^3$, let $\{(x_n,y_n,z_n)\} \subset X^3$ be the tripled fixed point iterative procedure defined by (10). Then, the tripled fixed point iterative procedure is stable with respect to T.

Proof. We apply Theorem 1, for $k=\mu=\rho := \frac{\kappa}{3}$. □

Remark 2. *Corollary 1 completes the existence theorem of tripled fixed points of Berinde and Borcut [11] with the stability result for the tripled fixed point iterative procedures, using mixed-monotone operators.*

Theorem 2. *Let $(X,\leq)$ be a partially ordered set. Suppose that there exits a metric d on X such that (X,d) is a complete metric space. Let $T: X^3 \to X$ be a continuous mapping having the mixed monotone property on X and satisfying (2), (3) and (4).*

If there exist $x_0, y_0, z_0 \in X$ such that

$$x_0 \leq T(x_0,y_0,z_0), \quad y_0 \geq T(y_0,x_0,y_0) \quad \text{and} \quad z_0 \leq T(z_0,y_0,x_0),$$

then there exist $x^*, y^*, z^* \in X$ such that

$$x^* = T(x^*,y^*,z^*), \quad y^* = T(y^*,x^*,y^*) \quad \text{and} \quad z^* = T(z^*,y^*,x^*).$$

Assume that for every (x,y,z), $(x_1,y_1,z_1) \in X^3$, there exists $(u,v,w) \in X^3$ that is comparable to (x,y,z) and (x_1,y_1,z_1). For $(x_0,y_0,z_0) \in X^3$, let $\{(x_n,y_n,z_n)\} \subset X^3$ be the tripled fixed point iterative procedure defined by (10). *Then, the tripled fixed point iterative procedure is stable with respect to T.*

Proof. Let $\{(x_n,y_n,z_n)\} \subset X^3$, $\varepsilon_n = d(u_{n+1}, T(u_n,v_n,w_n))$, $\delta_n = d(v_{n+1}, T(v_n,u_n,v_n))$ and $\gamma_n = d(w_{n+1}, T(w_n,v_n,u_n))$. Assume also that $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = \lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$ in order to establish that $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = x^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = y^*$ and $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = z^*$.

Therefore, using the contraction condition (2), we obtain

$$\begin{aligned}
d(u_{n+1},x^*) &\le d(u_{n+1}, T(u_n,v_n,w_n)) + d(T(u_n,v_n,w_n), x^*) \\
&= d(T(u_n,v_n,w_n), T(x^*,y^*,z^*)) + \varepsilon_n \\
&\le a_1 d(T(x^*,y^*,z^*),x^*) + b_1 d(T(u_n,v_n,w_n),u_n) + \varepsilon_n \\
&\le a_1 d(x^*,x^*) + b_1 d(T(u_n,v_n,w_n),u_{n+1}) + b_1 d(u_{n+1},x^*) + b_1 d(x^*,u_n) + \varepsilon_n \\
&= a_1 d(x^*,x^*) + b_1 d(u_{n+1},x^*) + b_1 d(x^*,u_n) + (b_1+1)\varepsilon_n.
\end{aligned}$$

Hence, $(1-b_1)d(u_{n+1},x^*) \le b_1 d(x^*,u_n) + \varepsilon'_n$, where $\varepsilon'_n := (b_1+1)\varepsilon_n + a_1 d(x^*,x^*)$. Passing it to the limit and applying Lemma 1 for $\frac{b_1}{1-b_1} \in [0,1)$, we obtain that $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = x^*$.

Now, using the contraction condition (3), we obtain

$$\begin{aligned}
d(v_{n+1},y^*) &\le d(v_{n+1}, T(v_n,u_n,v_n)) + d(T(v_n,u_n,v_n), y^*) \\
&= d(T(v_n,u_n,v_n), T(y^*,x^*,y^*)) + \delta_n \\
&\le a_2 d(T(y^*,x^*,y^*),y^*) + b_2 d(T(v_n,u_n,v_n),v_n) + \delta_n \\
&\le a_2 d(y^*,y^*) + b_2 d(T(v_n,u_n,v_n),v_{n+1}) + b_2 d(v_{n+1},y^*) + b_2 d(y^*,v_n) + \delta_n \\
&= a_2 d(y^*,y^*) + b_2 d(v_{n+1},y^*) + b_2 d(y^*,v_n) + (b_2+1)\delta_n.
\end{aligned}$$

So, $(1-b_2)d(v_{n+1},y^*) \le b_2 d(y^*,v_n) + \delta'_n$, where $\delta'_n := (b_2+1)\delta_n + a_2 d(y^*,y^*)$. Passing it to the limit and applying Lemma 1 for $\frac{b_2}{1-b_2} \in [0,1)$, we obtain that $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = y^*$.

Similarly, using the contraction condition (4), we obtain

$$\begin{aligned}
d(w_{n+1},z^*) &\le d(w_{n+1}, T(z_n,v_n,u_n)) + d(T(z_n,v_n,u_n), z^*) \\
&= d(T(w_n,v_n,u_n), T(z^*,y^*,x^*)) + \gamma_n \\
&\le a_3 d(T(z^*,y^*,x^*),z^*) + b_3 d(T(w_n,v_n,u_n),w_n) + \gamma_n \\
&\le a_3 d(z^*,z^*) + b_3 d(T(w_n,v_n,u_n),w_{n+1}) + b_3 d(w_{n+1},z^*) + b_3 d(z^*,w_n) + \gamma_n \\
&= a_3 d(z^*,z^*) + b_3 d(w_{n+1},z^*) + b_3 d(z^*,w_n) + (b_3+1)\gamma_n.
\end{aligned}$$

Therefore, $(1-b_3)d(w_{n+1},z^*) \le b_3 d(z^*,w_n) + \gamma'_n$, where $\gamma'_n := (b_3+1)\gamma_n + a_3 d(z^*,z^*)$. Passing it to the limit and applying Lemma 1 for $\frac{b_3}{1-b_3} \in [0,1)$, we obtain that $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = z^*$ and then we get the conclusion. □

Theorem 3. *Let $(X,\le)$ be a partially ordered set. Suppose that there exists a metric d on X such that (X,d) is a complete metric space. Let $T: X^3 \to X$ be a continuous mapping having the mixed monotone property on X and satisfying* (5), (6) *and* (7).

If there exist $x_0, y_0, z_0 \in X$ such that

$$x_0 \le T(x_0,y_0,z_0), \quad y_0 \ge T(y_0,x_0,y_0) \quad \text{and} \quad z_0 \le T(z_0,y_0,x_0),$$

then there exist $x^*, y^*, z^* \in X$ such that

$$x^* = T(x^*,y^*,z^*), \quad y^* = T(y^*,x^*,y^*) \quad \text{and} \quad z^* = T(z^*,y^*,x^*).$$

Assume that for every (x,y,z), $(x_1,y_1,z_1) \in X^3$, there exists $(u,v,w) \in X^3$ that is comparable to (x,y,z) and (x_1,y_1,z_1). For $(x_0,y_0,z_0) \in X^3$, let $\{(x_n,y_n,z_n)\} \subset X^3$ be the tripled fixed point iterative procedure defined by (10). *Then, the tripled fixed point iterative procedure is stable with respect to T.*

Proof. Let $\{(x_n,y_n,z_n)\}_{n=0}^{\infty} \subset X^3$, $\varepsilon_n = d(u_{n+1}, T(u_n,v_n,w_n))$, $\delta_n = d(v_{n+1}, T(v_n,u_n,v_n))$ and $\gamma_n = d(w_{n+1}, T(w_n,v_n,u_n))$.

Assume also that $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = \lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$ in order to establish that $\lim_{n\to\infty} u_n = x^*$, $\lim_{n\to\infty} v_n = y^*$ and $\lim_{n\to\infty} w_n = z^*$.

Therefore, using the contraction condition (5), we obtain

$$\begin{aligned}
d(u_{n+1},x^*) &\le d(u_{n+1}, T(u_n,v_n,w_n)) + d(T(u_n,v_n,w_n), x^*) \\
&= d(T(u_n,v_n,w_n), T(x^*,y^*,z^*)) + \varepsilon_n \\
&\le a_1 d(T(x^*,y^*,z^*),u_n) + b_1 d(T(u_n,v_n,w_n),x^*) + \varepsilon_n \\
&\le a_1 d(u_n,x^*) + b_1 d(T(u_n,v_n,w_n),u_n) + b_1 d(u_n,x^*) + \varepsilon_n \\
&= (a_1+b_1)d(u_n,x^*) + \varepsilon_n + b_1\varepsilon_{n-1}.
\end{aligned}$$

Hence, passing it to the limit and applying Lemma 1 for $h := a_1 + b_1 \in [0,1)$ and for $\varepsilon'_n := \varepsilon_n + b_1\varepsilon_{n-1} \to 0$, we obtain that $\lim_{n\to\infty} u_n = x^*$.

Now, using the contraction condition (6), we obtain

$$\begin{aligned}
d(v_{n+1},y^*) &\le d(v_{n+1}, T(v_n,u_n,v_n)) + d(T(v_n,u_n,v_n), y^*) \\
&= d(T(v_n,u_n,v_n), T(y^*,x^*,y^*)) + \delta_n \\
&\le a_2 d(T(y^*,x^*,y^*),v_n) + b_2 d(T(v_n,u_n,v_n),y^*) + \delta_n \\
&\le a_2 d(v_n,y^*) + b_2 d(T(v_n,u_n,v_n),v_n) + b_2 d(v_n,y^*) + \delta_n \\
&= (a_2+b_2)d(v_n,y^*) + \delta_n + b_2\delta_{n-1}.
\end{aligned}$$

So, passing it to the limit and applying Lemma 1 for $h := a_2 + b_2 \in [0,1)$ and for $\delta'_n := \delta_n + b_2\delta_{n-1} \to 0$, we get $\lim_{n\to\infty} v_n = y^*$.

Similarly, using the contraction condition (7), we obtain

$$\begin{aligned}
d(w_{n+1},z^*) &\le d(w_{n+1}, T(z_n,v_n,u_n)) + d(T(z_n,v_n,u_n), z^*) \\
&= d(T(w_n,v_n,u_n), T(z^*,y^*,x^*)) + \gamma_n \\
&\le a_3 d(T(z^*,y^*,x^*),w_n) + b_3 d(T(w_n,v_n,u_n),z^*) + \gamma_n \\
&\le a_3 d(w_n,z^*) + b_3 d(T(w_n,v_n,u_n),w_n) + b_3 d(w_n,z^*) + \gamma_n \\
&= a_3 d(w_n,z^*) + b_3 d(w_n,z^*) + b_3 d(T(w_n,v_n,u_n),w_n) + \gamma_n \\
&= (a_3+b_3)d(w_n,z^*) + \gamma_n + b_3\gamma_{n-1}.
\end{aligned}$$

Hence, passing it to the limit and applying Lemma 1 for $h := a_3 + b_3 \in [0,1)$ and for $\gamma'_n := \gamma_n + b_3\gamma_{n-1} \to 0$, we obtain that $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = z^*$ and then we get the conclusion. □

3 ILLUSTRATIVE EXAMPLE

Let (X,d) be a complete metric space, where $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$. Consider a continuous and mixed monotone mapping $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, with $T(x,y,z) = \frac{2x-2y+2z+1}{12}$.

Berinde and Borcut [11] proved the existence and the uniqueness of the tripled fixed point of T, respectively $(x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$, using $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{5}, \frac{1}{20}\right)$.

For $\kappa = \frac{1}{2}$, T satisfies the contraction condition (15), i.e.,

$$d(T(x,y,z), T(u,v,w)) \leq \frac{\kappa}{3}\left[d(x,u) + d(y,v) + d(z,w)\right],$$

for each $x, y, z, u, v, w \in X$, with $x \geq u$, $y \leq v$ and $z \geq w$.

We apply Corollary 1 in order to prove the stability of the tripled fixed point iteration procedure.

Let $\{(x_n, y_n, z_n)\} \subset \mathbb{R}^3$ be the sequence generated by the iterative procedure defined by (10), where $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{5}, \frac{1}{20}\right) \in \mathbb{R}^3$ is the initial value, which converges to a tripled fixed point $(x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$ of T.

Let $\{(u_n, v_n, w_n)\} \subset \mathbb{R}^3$ be an arbitrary sequence. For all $n = 0, 1, 2, \dots$ set

$$\varepsilon_n = d\left(u_{n+1}, T\left(u_n, v_n, w_n\right)\right), \quad \delta_n = d\left(v_{n+1}, T\left(v_n, u_n, v_n\right)\right), \quad \gamma_n = d\left(w_{n+1}, T\left(w_n, v_n, u_n\right)\right).$$

Assume that $\lim_{n\to\infty}(\varepsilon_n, \delta_n, \gamma_n) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Then

$$\varepsilon_n = d\left(u_{n+1}, T\left(u_n, v_n, w_n\right)\right) = \left|u_{n+1} - \frac{2u_n - 2v_n + 2w_n + 1}{12}\right|,$$

$$\delta_n = d\left(v_{n+1}, T\left(v_n, u_n, v_n\right)\right) = \left|v_{n+1} - \frac{2v_n - 2u_n + 2v_n + 1}{12}\right|,$$

$$\gamma_n = d\left(w_{n+1}, T\left(w_n, v_n, u_n\right)\right) = \left|w_{n+1} - \frac{2w_n - 2v_n + 2u_n + 1}{12}\right|,$$

and passing to the limit for $n \to \infty$, we obtain that

$$\lim_{n\to\infty}(u_n, v_n, w_n) = \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right),$$

which is the unique tripled fixed point of T.

Hence, the tripled fixed point iterative procedure defined by (10) is T-stable.

REFERENCES

[1] Abbas M., Ali Khan M., Radenović S. *Common coupled fixed point theorems in cone metric spaces for w-compatible mappings*. J. Appl. Math. Comput. 2010, **217** (1), 195–202. doi:10.1016/j.amc.2010.05.042

[2] Abbas M., Aydi H., Karapinar E. *Tripled fixed point of multivalued nonlinear contraction mappings in partially ordered metric spaces*. Abstr. Appl. Anal. 2011, ID 812690. doi:10.1155/2011/812690

[3] Amini-Harandi A. *Coupled and tripled fixed point theory in partially ordered metric spaces with application to initial value problem*. Math. Comput. Modelling 2012. Article in Press.

[4] Aydi H., Karapinar E. *Triple fixed point in ordered metric spaces*. Bull. Math. Anal. Appl. 2012, **4** (1), 197–207.

[5] Berinde V. *Coupled coincidence point theorems for mixed monotone nonlinear operators*. Comput. Math. Appl. (accepted)

[6] Berinde V. *Coupled fixed point theorems for φ-contractive mixed monotone mappings in partially ordered metric spaces*. Nonlinear Anal. 2012, **75** (6), 3218–3228. doi:10.1016/j.na.2011.12.021

[7] Berinde V. *Generalized coupled fixed point theorems for mixed monotone mappings in partially ordered meric spaces*. Nonlinear Anal. 2011, **74** (18), 7347–7355. doi:10.1016/j.na.2011.07.053

[8] Berinde V. Iterative Approximation of Fixed Points. In: Lectures Notes in Mathematics, vol. 1912. Springer Verlag, 2007. doi:10.1007/978-3-540-72234-2

[9] Berinde V. *On the stability of fixed point iteration procedures*. Bul. Stiint. Univ. Baia Mare, Fasc. Mat.-Inf. 2002, **18** (1), 7–12.

[10] Berinde V. *Summable almost stability of fixed point iteration procedures*. Carpathian J. Math. 2003, **19** (2), 81–88.

[11] Berinde V., Borcut M. *Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*. Nonlinear Anal. 2011, **74** (15), 4889–4897. doi:10.1016/j.na.2011.03.032

[12] Bhaskar T.G., Lakshmikantham V. *Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications*. Nonlinear Anal. 2006, **65** (7), 1379–1393. doi:10.1016/j.na.2005.10.017

[13] Borcut M. *Tripled coincident point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*. Appl. Math. Comput. 2012, **218** (14), 7339–7346. doi:10.1016/j.amc.2012.01.030

[14] Borcut M. *Tripled coincident point theorems for monotone contractive type mappings in partially ordered metric spaces*. Creat. Math. Inform. (accepted)

[15] Borcut M. *Tripled fixed point theorems for monotone contractive type mappings in partially ordered metric spaces*. Carpathian J. Math. (accepted)

[16] Borcut M., Berinde V. *Tripled coincidence theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*. Appl. Math. Comput. 2012, **218** (10), 5929–5936. doi:10.1016/j.amc.2011.11.049

[17] Choudhury B.S., Kundu A. *A coupled coincidence point result in partially ordered metric spaces for compatible mappings*. Nonlinear Anal. 2010, **73** (8), 2524–2531. doi:10.1016/j.na.2010.06.025

[18] Ćirić L.B., Lakshmikantham V. *Coupled random fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces*. Stoch. Anal. Appl. 2009, **27** (6), 1246–1259. doi:10.1080/07362990903259967

[19] Harder A.M., Hicks T.L. *Stability results for fixed point iteration procedures*. Math. Japon. 1988, **33**, 693–706.

[20] Imoru C.O., Olatinwo M.O. *On the stability of Picard and Mann iteration processes*. Carpathian J. Math. 2003, **19** (2), 155–160.

[21] Imoru C.O., Olatinwo M.O., Owojori O.O. *On the stability results for Picard and Mann iteration procedures*. J. Appl. Funct. Differ. Equ. 2006, **1** (1), 71–80.

[22] Jachymski J.R. *An extension of A. Ostrowski's theorem on the round-off stability of iterations*. Aequationes Math. 1997, **53** (3), 242–253.

[23] Karapinar E. *Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in cone metric spaces*. Comput. Math. Appl. 2010, **59** (12), 3656–3668. doi:10.1016/j.camwa.2010.03.062

[24] Lakshmikantham V., Ćirić L.B. *Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces*. Nonlinear Anal. 2009, **70** (12), 4341–4349. doi:10.1016/j.na.2008.09.020

[25] Olatinwo M.O. *Coupled fixed point theorems in cone metric spaces*. Ann. Univ. Ferrara 2011, **57** (1), 173–180.

[26] Olatinwo M.O. *Some stability results in complete metric space*. Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math. 2009, **48**, 83–92.

[27] Olatinwo M.O. *Some stability results for Picard iterative process in uniform space*. Vladikavkaz. Mat. Zh. 2010, **12** (4), 67–72.

[28] Olatinwo M.O. *Stability of coupled fixed point iteration and the continuous dependence of coupled fixed points*. Comm. Appl. Nonlinear Anal. 2012, **19** (2), 71–83.

[29] Olatinwo M.O., Owojori O.O., Imoru C.O. *Some stability results for fixed point iteration processes*. Aust. J. Math. Anal. Appl. 2006, **3** (2), 1–7.

[30] Osilike M.O. *A stable iteration procedure for quasi-contractive maps*. Indian J. Pure Appl. Math. 1996, **27** (1), 25–34.

[31] Osilike M.O. *Stability results for fixed point iteration procedure*. J. Nigerian Math. Soc. 1995, **14**, 17–29.

[32] Osilike M.O., Udomene A. *Short proofs of stability results for fixed point iteration procedures for a class of contractive type mappings.* Indian J. Pure Appl. Math. 1999, **30** (12), 1229–1234.

[33] Ostrowski A.M. *The round-off stability of iterations.* Z. Angew. Math. Mech. 1967, **47** (1), 77–81.

[34] Rao K.P.R., Kishore G.N.V. *A Unique Common tripled fixed point theorem in partially ordered cone metric spaces.* Bull. Math. Anal. Appl. 2011, **3** (4), 213–222.

[35] Rhoades B.E. *Fixed point theorems and stability results for fixed point iteration procedures.* Indian J. Pure Appl. Math. 1990, **21** (1), 1–9.

[36] Rhoades B.E. *Fixed point theorems and stability results for fixed point iteration procedures II.* Indian J. Pure Appl. Math. 1993, **24** (11), 691–703.

[37] Sabetghadam F., Masiha H.P., Sanatpour A.H. *Some coupled fixed point theorems in cone metric spaces.* Fixed Point Theory Appl. 2009, Article ID 125426. doi:10.1155/2009/125426

Received 15.10.2013

Тіміш I. *Стійкість ітераційних процедур для нерухомої точки третього порядку мішаних монотонних відображень* // Карпатські матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — C. 377–388.

Нещодавно Берінде і Боркут [11] ввели поняття нерухомої точки третього порядку і зараз вже є декілька досліджень цього об'єкту в частково впорядкованих метричних просторах і в конусоподібних метричних просторах.

У цій статті визначено поняття стійкості ітераційної процедури нерухомої точки третього порядку і отримані умови стійкості для мішаних монотонних відображень, які задовольняють різні умови стиску. Ці результати розширюють і доповнюють деякі відомі результати. Також подано ілюстративний приклад.

Ключові слова і фрази: нерухома точка третього порядку, стійкість, мішаний монотонний оператор, умови стиску.

Тимиш И. *Стойкость итерационных процедур для неподвижной точки третьего порядка смешанных монотонных отображений* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — C. 377–388.

Недавно Беринде и Боркут [11] ввели понятие неподвижной точки третьего порядка и сейчас уже есть несколько исследований этого объекта в частично упорядоченных метрических пространствах и конусоидальных метрических пространствах.

В этой статье определено понятие стойкости итерационной процедуры неподвижной точки третьего порядка и получены условия стойкости для смешанных монотонных отображений, которые удовлетворяют разные условия сжатия. Эти результаты расширяют и дополняют некоторые известные результаты. Также приведён иллюстративный пример.

Ключевые слова и фразы: неподвижная точка третьего порядка, стойкость, смешанный монотонный оператор, условия сжатия.

ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 389–393
doi:10.15330/cmp.6.2.389-393

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.389–393

TUSHEV A.V.

ON THE PRIMITIVE REPRESENTATIONS OF FINITELY GENERATED METABELIAN GROUPS OF FINITE RANK OVER A FIELD OF NON-ZERO CHARACTERISTIC

We consider some conditions for imprimitivity of irreducible representations of a metebelian group G of finite rank over a field k. We shoved that in the case where $char k = p > 0$ these conditions strongly depend on existence of infinite p-sections in G.

Key words and phrases: primitive representations, metabelian groups, rank of groups.

Oles Honchar Dnipropetrovsk National University, 72 Gagarin avenue, 49010, Dnipropetrovsk, Ukraine
E-mail: tushev@member.ams.org

We recall that a group G has finite (Prufer) rank if there is an integer r such that each finitely generated subgroup of G can be generated by r elements; its rank $r(G)$ is then the least integer r with this property. A group G is said to have finite torsion-free rank if it has a finite series in which each factor is either infinite cyclic or locally finite; its torsion-free rank $r_0(G)$ is then defined to be the number of infinite cyclic factors in such a series. The set SpG of all prime numbers p such that a soluble group G of finite rank has a p-quasicyclic factor is said to be the spectrum of the group G.

A group G is said to be minimax if it has a finite series each of whose factor is either cyclic or quasicyclic. It follows from results of [3] that any finitely generated metabelian group of finite rank is minimax.

Let R be a ring and let G be a group. Let H be a subgroup of the group G and let U be a right RH-module. Since the group ring RG can be considered as a left RH-module, we can define the tensor product $U \otimes_{RH} RG$ which is a right RG-module named as the RG-module induced from the RH-module U.

If M is an RG-module and

$$M = U \otimes_{RH} RG \tag{1}$$

for some subgroup $H \leq G$ and some RH-submodule U of M, then the module M is said to be induced from the RH-submodule U.

An RG-module M is said to be primitive if for any subgroup $H < G$ and any RH-submodule $U < M$ the identity (1) does not hold. If the group G has finite torsion-free rank and for any subgroup $H < G$ such that $r_0(H) < r_0(G)$ and any RH-submodule the identity (1) does not hold, then the module M is said to be semi-primitive. A representation of the group G is said to be primitive (semi-primitive) if the module of the representation is primitive (semi-primitive). Certainly, primitive irreducible modules are a basic subject for investigations when we are dealing with induced modules and, naturally, the following question appears: what can be said on the construction of a group if it has a faithful primitive irreducible representation over a field?

УДК 512.544
2010 *Mathematics Subject Classification:* 16S34, 20C07, 11R27.

In [4] Harper proved that any not abelian-by-finite finitely generated nilpotent group has an irreducible primitive representation over a not locally finite field. In [11] we proved that if a minimax nilpotent group of class 2 has a faithful irreducible primitive representation over a finitely generated field of characteristic zero then the group is finitely generated. In [5] Harper studied polycyclic groups which have faithful irreducible representations. It is well known (see [14]) that any polycyclic group is finitely generated soluble of finite rank and meets the maximal condition for subgroups (in particular, for normal subgroups). In [10] we showed that in the class of soluble groups of finite rank with the maximal condition for normal subgroups only polycyclic groups may have faithful irreducible primitive representations over a field of characteristic zero. In [7–9] we studied irreducible primitive representations of metabelian groups of finite rank over a field of characteristic zero. In the presented paper we consider the case of a field of positive characteristic.

Let A be a torsion-free abelian group of finite rank acted by a group Γ. Elements of the group A, which have finite orbits under action of the group Γ, form a Γ-invariant subgroup $\Delta_\Gamma(A)$ of the group A.

Let k be a field and I be an ideal of the group algebra kA. We put $I^\dagger = (I+1)\bigcap A$. The ideal I is said to be locally prime if $kB \bigcap I$ is a prime ideal of kB for some finitely generated dense subgroup $B \leq A$. Elements γ of the group Γ such that $I^\gamma \cap kB = I \cap kB$ for some finitely generated dense subgroup $B \leq A$ form a subgroup $S_\Gamma(I) \leq \Gamma$ (see [1]). We also put $Sep_\Gamma(I) = \langle \gamma \in S_\Gamma(I) | Sp(I) \bigcap Sp(I^\gamma) \neq \varnothing \rangle$, where $Sp(I)$ is the prime specter of the ideal I. The subgroup $Sep_\Gamma(I)$ is said to be the separator of the ideal I in the group Γ (see [8]).

An R-module is said to be Chernikov if its additive group is Chernikov.

Proposition 1. *Let $A = \oplus_{i=1}^n A_i$ be a Chernikov $\mathbb{Z}[g]$-module such that $Soc(A_i)$ is a cyclic $\mathbb{Z}[g]$-module for each i. Let k be a field such that $char k \notin \pi(A)$ and let M be a kA-module. Then there is an element $a \in M \backslash \{0\}$ such that $kC_i \cap Ann_{kA}(x) = P_i$ is a maximal ideal of kC_i for any $x \in akA$ and for each $1 \leq i \leq n$, where $C_i/H_i = Soc(A_i/H_i)$ and H_i is a maximal g-invariant subgroup of $Ann^\dagger_{kA}(x) \cap A_i$.*

Proof. We can repeat the argument of the proof of proposition 2.6 of [8] noting out that lemma 2.5 of [8] remains true because the condition $char k \notin \pi(A)$ allows us to apply Maschke's theorem. □

Theorem 1. *Let A be an abelian torsion-free group of finite rank acted by a group of operators Γ of finite torsion-free rank. Let k be a field such that $char k \notin Sp(A)$, let M be a kA-module and let $x \neq 0$ be an element of M such that $Ann^\dagger_{kA}(x)$ is a dense subgroup of A. Then there is an element $y \in M \backslash \{0\}$ such that $Ann^\dagger_{kA}(y)$ has a non- trivial subgroup W such that $Sp(Ann_{kA}(y)) \cap Sp(Ann_{kA}(y)^\gamma) = \varnothing$ for any $\gamma \in \Gamma \backslash N_\Gamma(W)$, where $N_\Gamma(W)$ is the normalizer of the subgroup W in Γ.*

Proof. If $char k = 0$, then the assertion is proved in theorem 3.5 of [8]. Suppose that $char k = p > 0$, then $p \notin Sp(A)$ and hence the Sylow p-subgroup $B/Ann^\dagger_{kA}(x)$ of the quotient group $A/Ann^\dagger_{kA}(x)$ is finite. Then xkB is a finite k-dimensional and hence Artenian kB- module. Therefore, there is an element $z \in xkB$ such that $Ann_{kB}(z)$ is a maximal ideal of kB and, evidently, $Ann_{kB}(x) \leq Ann_{kB}(z)$. As $B/Ann^\dagger_{kA}(x)$ is a p-group and $char k = p$, it is well known that $Ann_{kB}(z)$ is the augmentation ideal of kB and hence, as $Ann_{kB}(z) \leq Ann_{kA}(z)$, we can conclude that $B \leq Ann^\dagger_{kA}(z)$. Since $Ann_{kA}(x) \leq Ann_{kA}(z)$, $B \leq Ann^\dagger_{kA}(z)$ and $B/Ann^\dagger_{kA}(x)$ is the Sylow p-subgroup of the quotient group $A/Ann^\dagger_{kA}(x)$, it is easy to show that $p \notin \pi(A/Ann^\dagger_{kA}(z))$. Thus, changing x by z we can assume that $char k \notin \pi(A/Ann^\dagger_{kA}(x))$. Now, we can repeat the argument of the proof of theorem 3.5 of [8] applying proposition 1 instead of proposition 2.6 of [8]. □

Theorem 2. *Let A be an abelian torsion-free group of finite rank acted by a soluble group Γ of finite torsion-free rank such that $\Delta_\Gamma(A) = 1$. Let k be a field such that $char k \notin Sp(A)$ and let M be a kA-module. Suppose that there is an element $x \in M \backslash \{0\}$ such that $Ann_{kA}(x)$ is a non-zero locally prime ideal of kA and $r_0(Sep_\Gamma(Ann_{kA}(x))) = r_0(\Gamma)$. Then there is an element $y \in M \backslash \{0\}$ such that $Ann^\dagger_{kA}(y)$ contains a non-trivial $Sep_\Gamma(Ann_{kA}(y))$-invariant subgroup.*

Proof. We can repeat the arguments of the proof of theorem 3.8 of [8] applying theorem 1 instead of theorem 3.5 of [8]. □

Theorem 3. *Let G be a soluble group of finite torsion-free rank and let A be an abelian normal torsion-free subgroup of G such that $\Delta_G(A) = 1$. Let k be a field such that $char k \notin Sp(A)$ and let M be a kG-module. If the module M is not kA-torsion-free then there is an element $a \in M \backslash \{0\}$ such that*

$$akG = akH \otimes_{kH} kG \quad \text{and} \quad r_0(H/C_H(akH)) < r_0(G),$$

where $H = Sep_G(Ann_{kA}(a))$.

Proof. We can repeat the arguments of the proof of theorem 4.2 of [8] applying theorem 2 instead of theorem 3.8 of [8]. □

Lemma 1. *Let A be a torsion-free abelian minimax group acted by a soluble group Γ, let k be a field such that $char k \notin SpA$ and let $0 \neq \alpha \in kA$. Then there is a maximal ideal L of kA such that $|A : L^\dagger| < \infty$ and $\alpha^\gamma \notin L$ for any $\gamma \in \Gamma$.*

Proof. Evidently, there is a finitely generated subring $R \leq k$ such that $\alpha \in RA$ then, by theorem 2.1 of [6], there is a maximal ideal $I \leq RA$ such that $|RA : I| < \infty$ and $\alpha^\gamma \notin I$ for any $\gamma \in \Gamma$. Then RA/I is a finite field and hence $A/I^\dagger = \langle g \rangle$ is a finite cyclic group such that $char k \notin \pi(\langle g \rangle)$. Let f be the field of fractions of the domain R then, by Maschke's theorem , $f\langle g \rangle \cong fA/(1-I^\dagger)fA$ is a semi-prime ring. Then there are elements $\beta_i, \gamma_i \in fA$, where $1 \leq i \leq n$, such that $\beta_i f\langle g \rangle$ is a maximal ideal of $f\langle g \rangle$, $\prod_{i=1}^n \beta_i = 0$ and $\sum_{i=1}^n \beta_i \gamma_i = 1$. Evidently, there is a finitely generated subring $S \leq f$ such that $R \leq S$ and $\beta_i, \gamma_i \in SA$. Let J be a maximal ideal of SA such that $J \cap RA = I$. Since $\alpha^\gamma \in RA \backslash I$ for any $\gamma \in \Gamma$ and $J \cap RA = I$, we can conclude that $\alpha^\gamma \notin J$ for any $\gamma \in \Gamma$. As $\prod_{i=1}^n \beta_i = 0$ and the ideal J is maximal, we see that $\beta_i \in J$ for some i. Therefore,

$$\beta_i f\langle g \rangle \cap S\langle g \rangle = \beta_i S\langle g \rangle \leq J/(1-I^\dagger)SA.$$

Put $\beta_i f\langle g \rangle = X/(1-I^\dagger)fA$ then X is a maximal ideal of fA such that $X \cap SA \leq J$. As $\alpha^\gamma \in SA \backslash J$ for any $\gamma \in \Gamma$, we can conclude that $\alpha^\gamma \notin X$ for any $\gamma \in \Gamma$. Let L be a maximal ideal of kA such that $X \leq L$ then $L \cap fA = X$ and as $\alpha^\gamma \in fA \backslash X$ for any $\gamma \in \Gamma$, we can conclude that $\alpha^\gamma \notin L$ for any $\gamma \in \Gamma$. □

Lemma 2. *Let G be a finitely generated metabelian group of finite Prufer rank, let k be a field such that char$k \notin SpG$ and let M be a simple kG-module. Let A be an abelian torsion-free normal subgroup of G such that A is contained in the derived subgroup of G and the quotient group G/A is polycyclic. Then the module M is not kA-torsion-free.*

Proof. By corollary 2.1 of [2], there are a free kA-submodule F of M and a non-zero element $\alpha \in kA$ such that each element of M/F is annihilated by some product $\alpha^{g_1}\dots\alpha^{g_m}$ of conjugates of α by elements of G. By lemma 1, there is a maximal ideal L of kC such $|A : L^{\dagger}| < \infty$ and L contains no conjugates of α by elements of G. Since $|A : L^{\dagger}| < \infty$, it is not difficult to show that L contains a non-zero G-invariant ideal I. As the ideal I is G-invariant, it is not difficult to show that MI is a submodule of M and hence, as the module M is simple, either $MI = 0$ or $MI = M$. If $MI = 0$, then the lemma holds. Thus we may assume that $MI = M$ and hence $ML = M$. Then, by lemma 5.2 of [8], each element of F/FL is annihilated by some product $\alpha^{g_1}\dots\alpha^{g_m}$ of conjugates of α by elements of G. As F is a free kA-module $\oplus_i(kA/kAL)_i \simeq F/FL$ and hence some such a product $\alpha^{g_1}\dots\alpha^{g_m}$ is contained in L. But it is a contradiction, because the maximal ideal L contains no conjugates of α by elements of G. □

Theorem 4. *Let G be a finitely generated metabelian group of finite Prufer rank, let k be a field such that char$k \notin Sp(A)$ and let M be an irreducible kG-module such that $C_G(M) = 1$. If the group G is not nilpotent-by-finite, then there are a subgroup $H \leq G$ and an irreducible kH-submodule $U \leq M$ such that $M = U\otimes_{kH}kG$ and $r_0(H/C_H(U)) < r_0(G)$.*

Proof. We can repeat the arguments of the proof of theorem 5.5 of [8] applying lemma 2 instead of lemma 5.4 of [8] and theorem 3 instead of theorem 4.2 of [8]. □

Corollary 1. *Let G be finitely generated group of finite Prufer rank which is an extension of an abelian group A by a cyclic group $< g >$ and such that G is not nilpotent-by-finite. Let k be a field such that char$k \notin Sp(A)$, then every faithful irreducible representation of G over k is induced from an irreducible representation of the group A.*

Proof. It is not difficult to note that the subgroup H in the proof of theorem 3 contains A. As $r_0(H/C_H(U)) < r_0(G)$, it implies that $A = H$. □

The corollary generalizes some results of [8] to the case of fields of nonzero characteristic. As it was proved in [12], an example constructed by Wehrfritz in [13] shows that the restriction on characteristic $p > 0$ of the field k ($p \notin SpG$) is essential.

REFERENCES

[1] Brookes C. J. B. *Ideals in group rings of soluble groups of finite rank.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1985, **97** (1), 27–49. doi:10.1017/S0305004100062551

[2] Brown K. A. *The Nullstellensatz for certain group rings.* J. London Math. Soc. 1982, **26** (3), 425–434. doi: 10.1112/jlms/s2-26.3.425

[3] Hall P. *On the finiteness of certain soluble groups.* Proc. London Math. Soc. 1959, **9** (4), 595–622. doi: 10.1112/plms/s3-9.4.595

[4] Harper D.L. *Primitive irreducible representations of nilpotent groups.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1977, **82** (2), 241–247. doi:10.1017/S0305004100053846

[5] Harper D.L. *Primitivity in representations of polycyclic groups.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1980, **88** (1), 15–31. doi:10.1017/S0305004100057327

[6] Segal D. *On the group rings of abelian minimax groups, II: The singular case.* J. Algebra. 2006, **306** (2), 378–396. doi:10.1016/j.jalgebra.2006.08.017

[7] Tushev A.V. *On the primitivity of group algebras of certain classes of soluble groups of finite rank.* Sb. Math. 1995, **186** (3), 447–463. doi:10.1070/SM1995v186n03ABEH000026

[8] Tushev A.V. *Spectra of conjugated ideals in group algebras of abelian groups of finite rank and control theorems.* Glasgow Math.J. 1996, **38** (3), 309–320. doi:10.1017/S0017089500031736

[9] Tushev A.V. *Induced modules over group algebras of metabelian groups of finite rank.* Comm. Algebra. 1999, **27** (12), 5921–5938. doi:10.1080/00927879908826798

[10] Tushev A.V. *On the primitive representations of soluble groups of finite rank.* Sb. Math. 2000, **191** (11), 1707–1749. doi:10.1070/SM2000v191n11ABEH000524

[11] Tushev A.V. *On primitive representations of minimax nilpotent groups.* Math. Notes. 2002, **72** (1–2), 117–128. doi:10.1023/A:1019877307181

[12] Tushev A.V. *On semi-primitive representations of finitely generated metabelian groups.* Proc. Dnipropertovsk Univ.: Math. 2001, **6**, 128–130. (in Russian)

[13] Wehrfritz B.A.F. *Groups whose irreducible representations have finite degree.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1981, **90** (3), 411–421. doi:10.1017/S0305004100058898

[14] Wehrfritz B.A.F. Group and ring theoretic properties of polycyclic groups. In: Algebra and Applications 10, Springer-Verlag, London, 2009.

Received 12.09.2014

Тушев А.В. *Про примітивні зображення скінченно породжених метабелевих груп скінченного рангу над полем ненульової характеристики* // Карпатські матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 389–393.

Розглядаються деякі умови імпримітивності незвідних зображень метабелевої групи G скінченного рангу над полем k. Показано, що у випадку $chark = p > 0$ ці умови суттєво залежать від існування нескінченних p-секцій у групі G.

Ключові слова і фрази: примітивні зображення, метабелеві групи, ранг груп.

Тушев А.В. *О примитивных представлениях конечно-порожденных метабелевых групп конечного ранга над полем ненулевой характеристики* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 389–393.

Рассматриваются некоторые условия импримитивности неприводимых представлений метабелевой группы G конечного ранга над полем k. Показано, что в случае $chark = p > 0$ эти условия существенно зависят от существования бесконечных p-секций в группе G.

Ключевые слова и фразы: примитивные представления, метабелевы группы, ранг групп.

ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, 6 (2), 394–398
doi:10.15330/cmp.6.2.394-398

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.394–398

CHERNEGA I.

HOMOMORPHISMS OF THE ALGEBRA OF SYMMETRIC ANALYTIC FUNCTIONS ON ℓ_1

The algebra $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$ of symmetric analytic functions of bounded type is investigated. In particular, we study continuity of some homomorphisms of the algebra of symmetric polynomials on ℓ_p and composition operators of the algebra of symmetric analytic functions. The paper contains several open questions.

Key words and phrases: polynomials and analytic functions on Banach spaces, symmetric polynomials, spectra of algebras.

Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 3b Naukova str., 79060, Lviv, Ukraine
E-mail: icherneha@ukr.net

INTRODUCTION

Let X be a complex Banach space. By a *symmetric function* on X we mean a function which is invariant with respect to a semigroup of isometric operators on X. In the case $X = \ell_p$ by a symmetric function on ℓ_p we mean a function which is invariant under any reordering of a sequence in ℓ_p.

Let us denote by $\mathcal{P}(\ell_p)$ the algebra of all polynomials on ℓ_p, $1 \le p < \infty$, and by $\mathcal{P}_s(\ell_p)$ the algebra of all symmetric polynomials on ℓ_p. The completion of $\mathcal{P}(\ell_p)$ in the metric of uniform convergence on bounded sets coincides with the algebra of entire analytic functions of bounded type $\mathcal{H}_b(\ell_p)$ on ℓ_p. We use the notations $\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ for the subalgebra of all symmetric analytic functions in $\mathcal{H}_b(\ell_p)$. Also we use the notation $\mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ for the spectrum (the set of all non-null continuous complex-valued homomorphisms) of the algebra $\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$.

Symmetric polynomials on rearrangement-invariant function spaces were studied in [7,8]. In [7] it is proved that the polynomials

$$F_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k, \qquad k = \lceil p \rceil, \lceil p \rceil + 1, \ldots \tag{1}$$

form an algebraic basis in the algebra of all symmetric polynomials on ℓ_p, where $\lceil p \rceil$ is the smallest integer that is greater than or equal to p.

Spectra of algebras of analytic functions were studied in [2,3,9,10]. The spectrum of the algebra $\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ was investigated in [4–6].

Recall that for any $\varphi, \theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ and $f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$, the *symmetric convolution* $\varphi \star \theta$ was defined in [4] as follows

$$(\varphi \star \theta)(f) = \varphi(\theta[T_y^s(f)]),$$

УДК 517.98
2010 *Mathematics Subject Classification:* 46-02, 46E30, 46J20.

where $T_y^s(f)(x) = f(x \bullet y) := (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$, $x, y \in \ell_p$, $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$.

Let $x, y \in \ell_p$, $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$. In [6] the *multiplicative intertwining* of x and y, $x \diamond y$, was defined as the resulting sequence of ordering the set $\{x_i y_j : i, j \in \mathbb{N}\}$ with one single index in some fixed order. It enabled us to define the *multiplicative convolution operator* as a mapping $f \mapsto M_y(f)$, where $M_y(f)(x) = f(x \diamond y)$. And for arbitrary $\varphi, \theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ in [6] it was defined their *multiplicative convolution* $\varphi \Diamond \theta$ according to

$$(\varphi \Diamond \theta)(f) = \varphi(\theta[M_x(f)]) \text{ for every } f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p).$$

Using the symmetric convolution operation and the multiplicative convolution operator in the spectrum of the algebra $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$, a representation of $\mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ in terms of entire functions of exponential type was obtained.

In this paper we continue to investigate the algebra $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$ of all symmetric analytic functions on ℓ_1 that are bounded on bounded sets. In particular, we study continuity of some homomorphisms (linear multiplicative operators) of the algebra of symmetric polynomials on ℓ_p and composition operators of the algebra of symmetric analytic functions.

1 CONTINUOUS AND DISCONTINUOUS HOMOMORPHISMS

Let us recall that in [5] it was constructed a family $\{\psi_\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\}$ of elements of the set $\mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ such that $\psi_\lambda(F_p) = \lambda$ and $\psi_\lambda(F_k) = 0$ for $k > p$.

Proposition 1. *The homomorphism $\Gamma : \mathcal{P}_s(\ell_1) \to \mathcal{P}_s(\ell_1)$, such that $\Gamma : F_n \mapsto F_{n-1}$, (in particular, $\Gamma : F_1 \mapsto 0$,) is discontinuous.*

Proof. Since $\psi_\lambda \circ F_1 = \lambda$ and $\psi_\lambda \circ F_k = 0$ when $k \neq 1$, we have that $\psi_\lambda \circ \Gamma(F_2) = \lambda$ and $\psi_\lambda \circ \Gamma(F_k) = 0$, $k \neq 2$. It follows that $\psi_\lambda \circ \Gamma$ is discontinuous and we obtain that Γ is discontinuous too. □

Note that Γ acts in the natural way from $\mathcal{P}_s(\ell_2)$ into $\mathcal{P}_s(\ell_1)$.

Question 1. *Does the homomorphism $\Gamma : \mathcal{P}_s(\ell_2) \longrightarrow \mathcal{P}_s(\ell_1)$ is discontinuous?*

Proposition 2. *The homomorphism $\Delta : \mathcal{P}_s(\ell_1) \longrightarrow \mathcal{P}_s(\ell_1)$, $\Delta : F_{n-1} \longmapsto F_n$, is discontinuous.*

Proof. Let us define

$$m(P(x)) := P(-x) = (-1)^{\deg P} P(x),$$

where P is a homogeneous polynomial. It is easy to see that m is continuous and $m(F_k) = (-1)^k F_k$.

We have $m \circ \Delta \circ m \circ \Delta(F_n) = -F_{n+2}$. Let $x \in \ell_1$, $x \neq 0$. Let us define

$$\Theta_x := \delta_x \circ m \circ \Delta \circ m \circ \Delta.$$

Then $\Theta_x(F_n) = -F_{n+2}(x)$.

Let $x_0 = (-1, 0, 0, \ldots)$. It is easy to see that $\delta_{x_0}(F_n) = \begin{cases} -1, & \text{if } n = 2k-1, \\ 1, & \text{if } n = 2k. \end{cases}$

We have $\Theta_{x_0}(F_n) : (F_1, F_2, \ldots) \longmapsto (0, 0, 1, -1, 1, -1, \ldots)$. According to [5, Theorem 1.6] we have that

$$(\delta_{x_0} \star \Theta_{x_0})(F_1) = \delta_{x_0}(F_1) + \Theta_{x_0}(F_1) = -1 + 0 = -1.$$

Similarly,

$$(\delta_{x_0} \star \Theta_{x_0})(F_2) = 1$$

and

$$(\delta_{x_0} \star \Theta_{x_0})(F_k) = 0 \quad \text{if} \quad k > 2.$$

Hence we obtain that Δ is discontinuous. □

Remark 1. *Propositions 1 and 2 are also true for homomorphisms $\Gamma : \mathcal{P}_s(\ell_p) \longrightarrow \mathcal{P}_s(\ell_p)$ and $\Delta : \mathcal{P}_s(\ell_p) \longrightarrow \mathcal{P}_s(\ell_p)$.*

2 COMPOSITION OPERATORS

In this section we consider some homomorphisms which are composition operators, and study their continuity.

1. Let $R : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$ be an analytic mapping, $R = (R_1, \ldots, R_m)$. Let us define $T_R : (F_1, \ldots, F_m) \longmapsto (R_1(F_1, \ldots, F_m), \ldots, R_m(F_1, \ldots, F_m))$, that is

$$T_R(F_k) = R_k(F_1, \ldots, F_m).$$

Let P be a symmetric polynomial of degree m on ℓ_1. Then, as it was mentioned above, there exists a polynomial q on $\mathbb{C}^m$ such that $P(x) = q(F_1(x), \ldots, F_m(x))$. Applying T_R we obtain that

$$T_R(P) = q(R_1(F_1, \ldots, F_m), \ldots, R_m(F_1, \ldots, F_m)).$$

Proposition 3. *If $R : t_n \longmapsto a_n t_n + c_n$, where $a_n = \varphi(F_n)$ for some $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}$ and $c_n = \psi(F_n)$ for some $\psi \in \mathcal{M}_{bs}$, then T_R is continuous.*

In this case $T_R(f) = (\delta_x \Diamond \varphi) \star \psi(f)$ for every $f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$.

Question 2. *For which more R the mapping T_R is continuous?*

2. Let us consider now an analytic function of one variable $h(t)$ and define

$$T_h(F_k(x)) := \sum_{n=1}^{\infty} (h(x_n))^k.$$

Proposition 4. *The operator T_h is continuous.*

Proof. The continuity of T_h can be proved directly. □

3. Let $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of symmetric polynomials such that for every $x \in \ell_1$ the sequence $(P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots) \in \ell_1$.

Let us denote by P a mapping $x \longmapsto (P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots)$. Also for every $f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$ we define

$$C_P(f)(x) := f \circ P(x).$$

Proposition 5. *The composition operator $C_P(f)$ is continuous.*

Theorem 1. *Let $G : \ell_1 \longrightarrow \ell_1$ be an analytic operator of bounded type. G commutes with permutation operators (in the sense that $G(\sigma_1 x) = \sigma_2 G(x)$, where σ_1, σ_2 are permutations on the set of positive integers) if and only if the operator $C_G(f)(x) := f \circ G(x)$, where $x \in \ell_1$, $f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$, is homomorphism.*

Proof. If G commutes with permutation operators, then

$$f(G(\sigma_1 x)) = f(\sigma_2(G(x))) = f(G(x)) \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_1).$$

On the contrary: suppose that G does not commute with σ_1, i.e. there exists x such that $G(\sigma_1 x) \neq \sigma_2 G(x)$ for any σ_2. Then there exists G_n such that $G_n(G(\sigma_1 x)) \neq G_n(G(x))$, since $G(\sigma_1 x) \not\sim G(x)$. Hence $G_n \circ G \notin \mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$, and we have a contradiction. □

4. Let $P_k \in \mathcal{P}_s(\ell_1)$ and $(P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x), \ldots) \in \ell_\infty$ for any $x \in \ell_1$. Let us define

$$V_n = \left(\frac{P_1(x)}{n}, \frac{P_2(x)}{n}, \ldots, \frac{P_n(x)}{n}, 0, 0, \ldots \right)$$

and let $\mathcal{U}$ be an arbitrary ultrafilter on $\mathbb{N}$.

Define

$$C_V(f) = \lim_{\mathcal{U}} f(V_n(x)),$$

where f is an arbitrary symmetric analytic function of bounded type on ℓ_1. By constructions of C_V and [1, Example 3.1] it is easy to see that $C_V(F_k) = 0$ if $k > 1$ and $C_V(F_1) \neq 0$ in the generale case.

Proposition 6. *C_V is a continuous operator.*

Theorem 2. *Let $F : \mathcal{H}_{bs}(\ell_1) \longrightarrow \mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$ be a homomorphism. Then there exists a mapping $\Lambda : \mathcal{M}_{bs}(\ell_1) \longrightarrow \mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ such that*

$$F(f)(x) = \widehat{f}(\Lambda(\delta_x)), \tag{2}$$

where $f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$ and $\widehat{f}$ is the Gelfand transform of f.

Proof. Let $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$, then $\psi = \varphi \circ F \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$. Let us put $\Lambda(\varphi) = \psi$. Then we have

$$\varphi \circ F(f) = \psi(f) = \Lambda(\varphi)(f).$$

Let $\varphi = \delta_x$ and we obtain

$$\delta_x \circ F(f) = F(f)(x) = \Lambda(\delta_x)(f) = \widehat{f}(\Lambda(\delta_x)).$$

□

It is easy to see that not every mapping $\Lambda : \mathcal{M}_{bs}(\ell_1) \to \mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ generates a continuous homomorphism on $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$ by the formula (2). We denote by $\mathfrak{M}(\ell_1)$ the class of all mappings which generate continuous homomorphisms.

Question 3. *How can we describe the class $\mathfrak{M}(\ell_1)$?*

From the properties of the operations $\star$ and $\Diamond$ immediately follows the next theorem.

Theorem 3. *Let $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ and mappings $\Lambda_1, \Lambda_2 : \mathcal{M}_{bs}(\ell_1) \longrightarrow \mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ belong to $\mathfrak{M}(\ell_1)$. Define*

$$\Lambda_\star(\varphi) := \Lambda_1(\varphi) \star \Lambda_2(\varphi),$$
$$\Lambda_\Diamond(\varphi) := \Lambda_1(\varphi) \Diamond \Lambda_2(\varphi).$$

Then $\Lambda_\star$ and $\Lambda_\Diamond$ belong to $\mathfrak{M}(\ell_1)$ as well. In other words, the class $\mathfrak{M}(\ell_1)$ is closed with respect to symmetric operations $\star$ and $\Diamond$.

REFERENCES

[1] Alencar R., Aron R., Galindo P., Zagorodnyuk A. *Algebras of symmetric holomorphic functions on ℓ_p*. Bull. Lond. Math. Soc. 2003, **35** (1), 55–64. doi:10.1112/S0024609302001431

[2] Aron R.M., Cole B.J., Gamelin T.W. *Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space.* J. Reine Angew. Math. 1991, **415**, 51–93.

[3] Aron R.M., Galindo P., García D., Maestre M. *Regularity and algebras of analytic funtions in infinite dimensions.* Trans. Amer. Math. Soc. 1996, **348**, 543–559.

[4] Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. *Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra.* Proc. Edinb. Math. Soc. 2011, **54**, 1–17. doi:10.1017/S0013091509001655

[5] Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. *The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions.* J. Math. Anal. Appl. 2012, **395** (2), 569–577. doi:10.1016/j.jmaa.2012.04.087

[6] Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. *A multiplicative convolution on the spectra of algebras of symmetric analytic functions.* Rev. Mat. Complut. 2014, **27** (2), 575–585. doi: 10.1007/s13163-013-0128-0

[7] González M., Gonzalo R., Jaramillo J.A. *Symmetric polynomials on rearrangement-invariant function spaces.* J. London Math. Soc. 1999, **59** (2), 681-697. doi:10.1112/S0024610799007164

[8] Nemirovskii A.S., Semenov S.M. *On polynomial approximation of functions on Hilbert space.* Mat. USSR Sbornik 1973, **21**, 255–277.

[9] Zagorodnyuk A. *Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. 2006, **134**, 2559–2569.

[10] Zagorodnyuk A. *Spectra of algebras of analytic functions and polynomials on Banach spaces.* Contem. Math. 2007, **435**, 381–394.

Received 08.10.2014

Чернега І. *Гомоморфізми алгебри симетричних аналітичних функцій на просторі ℓ_1* // Карпатські матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 394–398.

Досліджується алгебра $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$ цілих симетричних аналітичних функцій з ℓ_1 в $\mathbb{C}$, що є обмеженими на обмежених множинах. Зокрема, вивчається неперервність деяких гомоморфізмів алгебри симетричних поліномів на просторі ℓ_p та операторів композиції на алгебрі симетричних аналітичних функцій. В статті поставлено декілька відкритих питань.

Ключові слова і фрази: поліноми та аналітичні функції на банахових просторах, симетричні поліноми, спектри алгебр.

Чернега И. *Гомоморфизмы алгебры симметрических аналитических функций на пространстве ℓ_1* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 394–398.

В работе исследуется алгебра $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$ целых симметрических аналитических функций ограниченного типа с ℓ_1 в $\mathbb{C}$. В частности, изучается непрерывность некоторых гомоморфизмов алгебры симметрических полиномов на пространстве ℓ_p и операторов композиции на алгебре симметрических аналитических функций. В статье сформулировано несколько открытых вопросов.

Ключевые слова и фразы: полиномы и аналитические функции на банаховых пространствах, симметрические полиномы, спектры алгебр.

ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 399

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.399

РОСТИСЛАВ ІВАНОВИЧ ГРИГОРЧУК — ЛАУРЕАТ ПРЕМІЇ Л. СТІЛА 2015 РОКУ

Видатний український математик, доктор фізико-математичних наук, професор Техаського університету A&M Ростислав Іванович Григорчук нагороджений премією Л. Стіла (Leroy P. Steele Prize) 2015 року.

Цієї премії, яка вручається Американським математичним товариством за видатні досягнення та роботи в галузі математики, Р.І. Григорчук удостоєний за статтю "Степени роста конечно-порожденных групп и теория инвариантных средних" (Известия АН СССР, Серия математическая, 1984, 48 (5), с. 939–985).

У цій статті Ростислав Іванович побудував перший приклад нескінченної скінченно-породженої періодичної групи, ріст якої є проміжним між поліноміальним і експоненційним. Це відкриття стало справжнім проривом у теорії груп, бо дало відповідь на питання видатного американського математика, лауреата Філдсівської премії Джона Мілнора про існування таких груп. З того часу було побудовано багато інших прикладів груп з різними типами росту, але всі вони базуються на прикладі Р.І. Григорчука.

Без сумніву, група Григорчука є перлиною в колекції дивовижних і корисних алгебраїчних об'єктів. Вона знайшла застосування у багатьох інших галузях математики: теорії фракталів, голоморфній динаміці, ергодичній теорії, спектральній теорії груп, теорії випадкових блукань, теорії скінченних автоматів.

Роботи Р.І. Григорчука вплинули на кілька поколінь дослідників у галузі теорії груп. Сьогодні не можна уявити собі сучасну теорію груп без результатів українського математика Ростислава Івановича Григорчука.

Від щирої душі вітаємо лауреата!

Редакційна колегія
Івано-Франківське математичне товариство

ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, 6 (2), 400–401

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.400–401

Володимир Васильович Шарко

25.09.1949 – 07.10.2014

7 жовтня 2014 р. у віці 65 років пішов із життя видатний математик і талановитий вчитель Володимир Васильович Шарко.

Він народився 25 вересня 1949 р. у смт. Отиня, тепер Отинія Коломийського району Івано-Франківської обл. в сім'ї службовців. У 1959 р. батьки переїхали до м. Станиславів (нині Івано-Франківськ). Під їх впливом захоплення математикою формувалося у Володимира Васильовича з раннього дитинства. Велику роль у цьому зіграло те, що його батько, Шарко Василь Іванович, до другої світової війни був вчителем математики в старших класах середньої школи в м. Ізюм (Харківська обл.).

Після закінчення середньої школи №5 в м.Івано-Франківську він вступив до Київського державного університету ім. Тараса Шевченка. У 1973 році після завершення навчання на механіко-математичному факультеті був прийнятий до аспірантури Інституту математики Академії Наук УРСР. Його науковим керівником був професор Юрій Юрійович Трохимчук. У 1976 році в Інституті математики АН УРСР захистив кандидатську дисертацію, а в 1987 р. у Математичному інституті ім. В.А. Стеклова АН СРСР — докторську дисертацію за спеціальністю геометрія і топологія.

З 1976 р. життя Володимира Васильовича було нерозривно зв'язане з Інститутом математики НАН України. У 2001 році в Інституті математики був створений відділ топології і В.В. Шарко був обраний завідувачем цього відділу, а в 2007 р. він був призначений на посаду заступника директора з наукової роботи Інституту математики.

В.В. Шарко був провідним спеціалістом в області топології та її застосувань. Його перу належать біля 100 наукових робіт серед яких дві монографії з топології. Двадцять його учнів захистили кандидатські дисертації, троє з них також стали докторами наук.

У свої перших роботах В.В. Шарко суттєво розвинув теорію Морса, побудувавши нові інваріанти ланцюгових комплексів і застосувавши їх до вивчення алгебраїчної природи неоднозв'язних многовидів. Зокрема він отримав необхідні та достатні умови існування мінімальних ланцюгових комплексів в гомотопічному типі, а також описав компоненти зв'язності просторів точних функцій Морса на неоднозв'язних многовидах.

Подальші інтереси Володимира Васильовича відносились до теорії динамічних систем. В спільних працях з академіком РАН А.Т. Фоменком ним було знайдено оцінки для числа замкнених орбіт гамільтонових систем на многовидах. Крім того, В.В. Шарко детально дослідив структуру гладких функцій та векторних полів з ізольованими особливостями на поверхнях і отримав умови їх топологічної еквівалентності, а також отримав незалежне доведення класифікації компонент зв'язності просторів функцій Морса на компактних поверхнях.

В останні роки основну увагу він приділяв застосуванню методів некомутативної геометрії до алгебраїчної топології та якісної теорії векторних полів на многовидах. Зокрема, В.В. Шарко побудував нові L^2-інваріанти гільбертових комплексів і з їх допомогою отримав точні значення мінімально можливого числа замкнених орбіт відповідного індексу у цього класу векторних полів, а також довів, що ці числа є гомотопічними інваріантами многовиду.

За свої видатні наукові досягнення В.В. Шарко був нагороджений премією ім. Миколи Остроградського (1980 р.), преміями Крилова (2005 р.) і Лаврентьєва (2010 р.) Національної Академії Наук України, Державною премією України у галузі науки і технології (2006 р.). У травні 2006 року на Загальних зборах Національної Академії Наук України В.В. Шарко був обраний членом-кореспондентом НАН України.

Володимир Васильович був дуже енергійною людиною і зробив багато для розвитку математики в Україні та за її межами. З 1987 року він працював професором Київського Національного Університету ім. Тараса Шевченка. Він також був заступником академіка-секретаря секції математики Національної Академії Наук України, членом Київського та Американського математичних товариств, заступником головного редактора Українського математичного журналу, членом редакційних колегій наукових журналів "Methods of Functional Analysis and Topology" та "Карпатські математичні публікації", праць Міжнародного геометричного центру, а також Математичного бюлетеня Наукового товариства Шевченка.

Навіть в останній день життя він керував засіданням спеціалізованої вченої ради, на якому відбувся захист двох кандидатських дисертацій.

Пам'ять про Володимира Васильовича буде завжди жити в серцях всіх, хто його знав і любив.

Редакційна колегія
Київське математичне товариство
Івано-Франківське математичне товариство

Науковий журнал

Карпатські Математичні Публікації

(свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 14703-3674Р)

Том 6, №2
2014

Відповідальний за випуск д.ф.-м.н. Загороднюк А.В.

Комп'ютерна правка та макетування Івасюк І.Я.

Підписано до друку 29.12.2014 р. Формат $60\times84/_8$.
Папір офсетний. Друк цифровий. Гарнітура URW Palladio L, Pazo Math
Умовн. друк. Аркушів 26,27. Наклад 100 примірників.

Друк: пп Голіней О.М.
м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128
тел. 0342 58 04 32